TỌA ĐỘ ĐIỂM VÀ VECTOR TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

A – LÝ THUYẾT

1. Hệ tọa độ

Trong không gian, xét ba trục *x'Ox; y'Oy; z'Oz* vuông góc với nhau từng đôi một. Gọi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ lần lượt là các vectơ đơn vị các trục *x'Ox; y'Oy; z'Oz*. Hệ ba trục như vậy gọi là hệ trục tọa độ Đề-các vuông góc Oxyz trong không gian hay hệ tọa độ Oxyz .

Điểm O được gọi là gốc tọa độ.

Chú ý: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$ và $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{j} = 0$.

2. Tọa độ của một điểm

a) Định nghĩa: $M(x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ *(x : hoành độ, y : tung độ, z : cao độ)*

Chú ý:

- $M \in (Oxy) \Leftrightarrow z = 0; M \in (Oyz) \Leftrightarrow x = 0; M \in (Oxz) \Leftrightarrow y = 0$
- $M \in Ox \Leftrightarrow y = z = 0; M \in Oy \Leftrightarrow x = z = 0; M \in Oz \Leftrightarrow x = y = 0$.

b) Tính chất: Cho $A(x_A;y_A;z_A); B(x_B;y_B;z_B)$

- $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$
- $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- Toạ độ trung điểm M của đoạn thẳng AB: $M\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + x_B}{2}\right)$
- Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC:
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$
- Toạ độ trọng tâm G của tứ diện ABCD:
$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}\right)$$

3. Tọa độ vectơ

Định nghĩa: $\vec{u} = (x;y;z) \Leftrightarrow \vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$

Nhận xét: $M = (x;y;z) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = (x;y;z)$

II. BIỂU THỨC TỌA ĐỘ CỦA PHÉP TOÁN VECTƠ

1. Định lý: Trong không gian Oxyz cho $\vec{a} = (a_1;a_2;a_3); \vec{b} = (b_1;b_2;b_3); k \in R$

- $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2; a_3 \pm b_3)$
- $k\vec{a} = k(a_1;a_2;a_3) = (ka_1;ka_2;ka_3)$

2. Hệ quả: Trong không gian Oxyz cho $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3);\vec{b}=(b_1;b_2;b_3);k\in R$

- $\vec{a}=\vec{b}\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=b_1\\a_2=b_2\\a_3=b_3\end{cases}$
- $\vec{0}=(0;0;0);\vec{i}=(1;0;0);\vec{j}=(0;1;0);\vec{k}=(0;0;1);$
- $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)\Leftrightarrow\vec{a}=k\vec{b}\,(k\in R)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a_1=kb_1\\a_2=kb_2\\a_3=kb_3\end{cases}\Leftrightarrow\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3},(b_1,b_2,b_3\neq 0)$$

- Cho hai điểm $A(x_A;y_A;z_A)$;B$(x_B;y_B;z_B)$thì:

  * $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$

  * Tọa độ trung điểm M của đoạn thẳng AB là $M\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

III. TÍCH VÔ HƯỚNG

1. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Định lý: Trong không gian Oxyz, tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ được xác định bởi: $\vec{a}.\vec{b}=a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3$

2. Ứng dụng

- $\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3=0$
- $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}$
- $\vec{a}^{\,2}=a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}$
- $\cos\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{a_1.b_1+a_2.b_2+a_3.b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}.\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}$ (với $\vec{a},\vec{b}\neq\vec{0}$)

IV. PHƯƠNG TRÌNH MẶT CẦU

Định lý: Trong không gian $Oxyz$, mặt cầu (S)tâm $I(a;b;c)$ bán kính R có phương trình là:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

Nhận xét: Phương trình mặt cầucòn có thểviết dưới dạng: $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ với $d=a^2+b^2+c^2-R^2\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$.

V. TÍCH CÓ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

1. Định nghĩa

Trong không gian $M'(-a;b;-c)$ cho hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$ và $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ kí hiệu là $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, được xác định bởi công thức:

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\right)=\left(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1\right)$$

Chú ý: Tích có hướng của hai vectơ là một vectơ, tích vô hướng của hai vectơ là một số.

2. Tính chất

- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a};\ \left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$
- $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=-\left[\vec{b},\vec{a}\right]$
- $\left[\vec{i},\vec{j}\right]=\vec{k};\ \left[\vec{j},\vec{k}\right]=\vec{i};\ \left[\vec{i},\vec{k}\right]=\vec{j};$
- $\left|[\vec{a},\vec{b}]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

3. Ứng dụng của tích có hướng

- ***Điều kiện đồng phẳng của ba vectơ:*** $\vec{a},\vec{b}$ và $\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
- ***Diện tích hình bình hành ABCD:*** $S_{ABCD}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right]\right|$
- ***Diện tích tam giác ABC:*** $S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$
- ***Thể tích khối hộp ABCD.A'B'C'D':*** $V_{ABCDA'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$
- ***Thể tích tứ diện ABCD:*** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$

Chú ý:

- ***Tích vô hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để chứng minh hai đường thẳng vuông góc, tính góc giữa hai đường thẳng.
- ***Tích có hướng*** của hai vectơ thường sử dụng để tính diện tích tam giác; tính thể tích khối tứ diện, thể tích hình hộp; chứng minh các vectơ đồng phẳng – không đồng phẳng, chứng minh các vectơ cùng phương.

B – BÀI TẬP

B1. TRẮC NGHIỆM

Câu 1. Cho điểm A(5; 3; –4). Khoảng cách từ A đến mặt phẳng (Oxy) là

A. 3 **B.** 4 **C.** 5 **D.** $\sqrt{34}$

Câu 2. Tìm y, z sao cho $\vec{b}$ = (–2; y; z) cùng phương với $\vec{a}$ = (1; 2; –1)

A. y = –4 và z = 2 **C.** y = –2 và z = 4

B. y = 4 và z = –2 **D.** y = 2 và z = –4

Câu 3. Cho điểm A(1; 0; 5), B(–1; 2; 4). Tính AB

A. 3 **B.** 5 **C.** 2 **D.** 4

Câu 4. Tính góc giữa hai vector $\vec{a}$ = (–2; –1; 2) và $\vec{b}$ = (0; 1; –1)

A. 135° **B.** 90° **C.** 60° **D.** 45°

Câu 5. Cho các điểm A(0; –3; 2), B(3; 0; 1), C(0; 0; 4). Số điểm thuộc mặt phẳng Oxy là

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3

Câu 6. Cho bốn điểm A(1; 1; 0), B(0; 2; 1), C(1; 0; 2), D(1; 1; 1). Tính thể tích khối tứ diện ABCD

A. 1/6 **B.** 1/3 **C.** 1/2 **D.** 1

Câu 7. Cho điểm S(3; 1; –2). Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc H của S trên Oy

A. (3; 0; –2) **C.** (0; 1; 0)

B. (0; 1; –2) **D.** (–3; 0; 2)

Câu 8. Cho điểm A(–2; 4; –3). Tìm tọa độ điểm B đối xứng với A qua mặt phẳng (Oyz)

A. (–2; –4; 3) **B.** (–2; 0; 0) **C.** (0; 4; –3) **D.** (2; 4; –3)

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(0; 4; –3). Tính OA

A. 3 **B.** 5 **C.** 1 **D.** 7

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(3; 3; 3). Hình chiếu vuông góc của A trên mặt phẳng Oxy có tọa độ là

A. (–3; –3; 3) **C.** (3; 0; 3)

B. (3; 3; –3) **D.** (3; 3; 0)

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(2; –2; 2) và B(3; 2; 5). Trong các độ dài hình chiếu vuông góc của AB trên các trục Ox, Oy, Oz thì độ dài lớn nhất là

A. 5 **B.** 6 **C.** 3 **D.** 4

Câu 12. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác $\vec{0}$, khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$. **C.** $\dfrac{-\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

B. $.\dfrac{|\vec{a}.\vec{b}|}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}..$ **D.** $\dfrac{\vec{a}+\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$.

Câu 13. Gọi φ là góc giữa hai vectơ $\vec{a}=(1;2;0)$ và $\vec{b}=(2;0;-1)$, khi đó $\cos\varphi$ bằng

A. $\dfrac{2}{5}$ **C.** $-\dfrac{2}{5}$ **D.** $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

B. 0

Câu 14. Cho vectơ $\vec{a}=(1;3;4)$, tìm vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$

A. $\vec{b}=(-2;-6;-8)$. **C.** $\vec{b}=(-2;6;8)$.

B. $\vec{b}=(-2;-6;8)$. **D.** $\vec{b}=(2;-6;-8)$.

Câu 15. Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}=(-2;2;5),\vec{b}=(0;1;2)$ trong không gian bằng

A. 10. **B.** 13. **C.** 12. **D.** 14.

Câu 16. Trong không gian cho hai điểm $A(-1;2;3), B(0;1;1)$, độ dài đoạn AB bằng

A. $\sqrt{6}$. **B.** $\sqrt{8}$. **C.** $\sqrt{10}$. **D.** $\sqrt{12}$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, gọi $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ là các vectơ đơn vị, khi đó với $M(x;y;z)$ thì $\overrightarrow{OM}$ bằng

A. $-x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$. **C.** $x\vec{j}+y\vec{i}+z\vec{k}$.

B. $x\vec{i}-y\vec{j}-z\vec{k}$. **D.** $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$.

Câu 18. Tích có hướng của hai vectơ $\vec{a}=(a_1;a_2;a_3)$, $\vec{b}=(b_1;b_2;b_3)$ là một vectơ, kí hiệu $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$, được xác định bằng tọa độ

A. $(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1-a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$. **C.** $(a_2b_3-a_3b_2;a_3b_1+a_1b_3;a_1b_2-a_2b_1)$.

B. $(a_2b_3+a_3b_2;a_3b_1+a_1b_3;a_1b_2+a_2b_1)$. **D.** $(a_2b_2-a_3b_3;a_3b_3-a_1b_1;a_1b_1-a_2b_2)$.

Câu 19. Cho các vectơ $\vec{u}=(u_1;u_2;u_3)$ và $\vec{v}=(v_1;v_2;v_3)$, $\vec{u}.\vec{v}=0$ khi và chỉ khi

A. $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=1$. **C.** $u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3=0$.

B. $u_1+v_1+u_2+v_2+u_3+v_3=0$. **D.** $u_1v_2+u_2v_3+u_3v_1=-1$.

Câu 20. Cho vectơ $\vec{a}=(1;-1;2)$, độ dài vectơ $\vec{a}$ là

A. $\sqrt{6}$. **C.** $-\sqrt{6}$.

B. 2. **D.** 4.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên trục Ox sao cho M không trùng với gốc tọa độ, khi đó tọa độ điểm M có dạng

A. $M(a;0;0), a\neq 0$. **C.** $M(0;0;c), c\neq 0$.

B. $M(0;b;0), b\neq 0$. **D.** $M(a;1;1), a\neq 0$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm M nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho M không trùng với gốc tọa độ và không nằm trên hai trục Ox, Oy, khi đó tọa độ điểm M là ($a,b,c\neq 0$)

A. $(0;b;a)$. **C.** $(0;0;c)$.

B. $(a;b;0)$. **D.** $(a;1;1)$

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a}=(0;3;4)$ và $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$, khi đó tọa độ vectơ $\vec{b}$ có thể là

A. $(0;3;4)$. **C.** $(2;0;1)$.

B. $(4;0;3)$. **D.** $(-8;0;-6)$.

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$ cho hai vectơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$, khi đó $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|$ bằng

A. $|\vec{u}|.|\vec{v}|.\sin(\vec{u},\vec{v})$. **C.** $\vec{u}.\vec{v}.\cos(\vec{u},\vec{v})$.

B. $|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$. **D.** $\vec{u}.\vec{v}.\sin(\vec{u},\vec{v})$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$ cho ba vectơ $\vec{a}=(1;-1;2), \vec{b}=(3;0;-1), \vec{c}=(-2;5;1)$, vectơ $\vec{m}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$ có tọa độ là

A. $(6;0;-6)$.
C. $(6;-6;0)$.
B. $(-6;6;0)$.
D. $(0;6;-6)$.

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $OADB$ có $\overrightarrow{OA}=(-1;1;0)$, $\overrightarrow{OB}=(1;1;0)$ (O là gốc tọa độ). Khi đó tọa độ tâm hình hình $OADB$ là:

A. $(0;1;0)$ **B.** $(1;0;0)$ **C.** $(1;0;1)$ **D.** $(1;1;0)$

Câu 27. Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho các điểm $A(2;1;0)$, $B(3;1;-1)$, $C(1;2;3)$. Tọa độ điểm D để ABCD là hình bình hành là:

A. $D(2;1;2)$ **B.** $D(2;-2;-2)$ **C.** $D(-2;1;2)$ **D.** $D(0;2;4)$

Câu 28. Cho 3 điểm A(2; 1; 4), B(–2; 2; –6), C(6; 0; –1). Tích $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

A. –67 **B.** 65 **C.** 67 **D.** 33

Câu 29. Cho tam giác ABC với $A(-3;2;-7);B(2;2;-3)$; $C(-3;6;-2)$. Điểm nào sau đây là trọng tâm của tam giác ABC

A. $G(-4;10;-12)$ **B.** $G\left(\frac{4}{3};-\frac{10}{3};4\right)$ **C.** $G(4;-10;12)$ **D.** $G\left(-\frac{4}{3};\frac{10}{3};-4\right)$

Câu 30. Trong không gian Oxyz, cho bốn điểm $A(1,0,0);B(0,1,0);C(0,0,1);D(1,1,1)$. Xác định tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD

A. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ **B.** $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ **C.** $\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$ **D.** $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$

B2. TỰ LUẬN

Bài 1: Trong không gian Oxyz cho A(0;1;2) ; B(2;3;1) ; C(2;2;-1)

a) Tính $F=\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].(\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{CB})$.
b) Chứng tỏ rằng OABC là một hình chữ nhật tính diện tích hình chữ nhật đó.
c) Viết phương trình mặt phẳng (ABC).
d) Cho S(0;0;5).Chứng tỏ rằng S.OABC là hình chóp.Tính thể tích hình chóp.

Bài 2: Cho bốn điểm A(1;0;0) , B(0;1;0) , C(0;0;1) , D(-2;1;-1)

a) Chứng minh rằng A,B,C,D là bốn đỉnh của tứ diện.
b) Tìm tọa độ trọng tâm G của tứ diện ABCD.
c) Tính các góc của tam giác ABC.
d) Tính diện tích tam giác BCD.
e) Tính thể tích tứ diện ABCD và độ dài đường cao của tứ diện hạ từ đỉnh A.

Bài 3: Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D'biết A(0,0,0), B(1;0;0), D(0;2;0), A'(0;0;3), C'(1;2;3).

a) Tìm tọa độ các đỉnh còn lại của hình hộp.
b) Tính thể tích hình hộp.

c) Chứng tỏ rằng AC’ đi qua trọng tâm của hai tam giác A’BD và B’CD’.

d) Tìm tọa độ điểm H là hình chiếu vuông góc của D lên đoạn A’C.

Bài 4: Trong không gian tọa độ Oxyz cho điểm A(2;3;4). Gọi M_1, M_2, M_3 lần lượt là hình chiếu của A lên ba trục tọa độ Ox;Oy,Oz và N_1, N_2, N_3 là hình chiếu của A lên ba mặt phẳng tọa độ Oxy, Oyz, Ozx.

a) Tìm tọa độ các điểm M_1, M_2, M_3 và N_1, N_2, N_3.

b) Chứng minh rằng $N_1N_2 \perp AN_3$.

c) Gọi P,Q là các điểm chia đoạn N_1N_2, OA theo tỷ số k xác định k để $PQ//M_1N_1$.

Bài 5: Tìm:

a) Cho ba điểm A(2 ; 5 ; 3), B(3 ; 7 ; 4), C(x ; y ; 6).Tìm x, y để A, B, C thẳng hàng

b) Cho hai điểm A(-1 ; 6 ; 6), B(3 ; -6 ; -2). Tìm M thuộc mp(Oxy) sao cho MA + MB nhỏ nhất.

c) Tìm trên Oy điểm cách đều hai điểm A(3 ; 1 ; 0) và B(-2 ; 4 ; 1).

d) Tìm trên mặt phẳng Oxz cách đều ba điểm A(1 ; 1; 1), B(-1 ; 1 ; 0),C(3 ;1 ; -1).

e) Cho hai điểm A(2 ; -1 ; 7), B(4 ; 5 ; -2). Đường thẳng AB cắt mp(Oyz) tại điểm M.

f) Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào? Tìm tọa độ điểm M.

<u>Bài 6:</u> Trong không gian tọa độ Oxyz cho A(1 ; 1 ; 0), B0 ; 2 ; 1), C(1 ; 0 ; 2), D(1 ; 1 ; 1)

a) Chứng minh bốn điểm không đồng phẳng. Tính thể tích tứ diện ABCD.

b) Tìm tọa độ trọng tâm của tam giác ABC, trọng tâm tứ diện ABCD.

c) Tính diện tích các mặt của tứ diện.

d) Tính độ dài các đường cao của khối tứ diện.

e) Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD.

f) Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp tứ diện ABCD.