

ĐỊNH LÝ TALET- TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG

A. LÝ THUYẾT

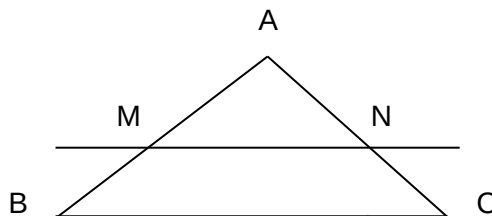
1. Định lý Talet trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$MN \parallel BC$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



2. Khái niệm tam giác đồng dạng

Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$A' = A ; B' = B ; C' = C$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

a) Trường hợp thứ nhất (c.c.c):

Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

b) Trường hợp thứ 2 (c.g.c):

Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và 2 góc tạo bởi tạo các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam giác đó đồng dạng.

c) Trường hợp thứ 3(gg):

Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

d) Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Nếu cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

B. BÀI TẬP

Bài 1: Cho tam giác vuông ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) có AB = 9cm, AC = 12cm. Tia phân giác góc A cắt BC tại D. Từ D kẻ DE vuông góc với AC (E thuộc AC).

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BD, CD và DE.

b) Tính diện tích các tam giác ABD và ACD.

Bài 2: Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Biết $AB = 2,5\text{cm}$; $AD = 3,5\text{cm}$; $BD = 5\text{cm}$; và góc $DAB = DBC$.

a) Chứng minh hai tam giác ADB và BCD đồng dạng.

b) Tính độ dài các cạnh BC và CD.

Bài 3: Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 15\text{ cm}$; $AC = 20\text{ cm}$. Kẻ đường cao AH

a) Chứng minh: $\triangle ABC$ đồng dạng $\triangle HBA$ từ đó suy ra: $AB^2 = BH \cdot AC$.

b) Tính BH và CH.

Bài 4: Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, biết $AB = 15\text{ cm}$, $AH = 12\text{ cm}$

a) Chứng minh $\triangle AHB$ đồng dạng $\triangle CHA$

b) Tính các đoạn BH, CH, AC

Bài 5: Cho hình bình hành ABCD, trên tia đối của tia DA lấy $DM = AB$, trên tia đối của tia BA lấy $BN = AD$. Chứng minh:

a) $\triangle CBN$ và $\triangle CDM$ cân.

b) $\triangle CBN$ đồng dạng $\triangle MDC$

c) Chứng minh M, C, N thẳng hàng.

Bài 6: Cho tam giác ABC ($AB < AC$), hai đường cao BE và CF gặp nhau tại H, các đường thẳng kẻ từ B song song với CF và từ C song song với BE gặp nhau tại D. Chứng minh:

a) $\triangle ABE$ đồng dạng $\triangle ACF$

b) $AE \cdot CB = AB \cdot EF$

c) Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh H, I, D thẳng hàng.

Bài 7: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H.

a) Chứng minh: $AE \cdot AC = AF \cdot AB$

b) Chứng minh: $\triangle AFE$ đồng dạng $\triangle ACB$

c) Chứng minh: $\triangle FHE$ đồng dạng $\triangle BHC$

a) d) Chứng minh: $BF \cdot BA + CE \cdot CA = BC^2$

Bài 8: Cho hình thang cân MNPQ ($MN \parallel PQ$, $MN < PQ$), $NP = 15\text{ cm}$, đường cao $NI = 12\text{ cm}$, $QI = 16\text{ cm}$

a) Tính độ dài IP, MN

b) Chứng minh rằng: $QN \perp NP$

c) Tính diện tích hình thang MNPQ

d) Gọi E là trung điểm của PQ. Đường thẳng vuông góc với EN tại N cắt đường thẳng PQ tại K. Chứng minh rằng: $KN^2 = KP \cdot KQ$

Bài 9: Cho hình bình hành ABCD, trên tia đối của tia DA lấy $DM = AB$, trên tia đối của tia BA lấy $BN = AD$. Chứng minh:

a) $\triangle CBN$ và $\triangle CDM$ cân.

b) $\triangle CBN$ đồng dạng $\triangle MDC$

c) Chứng minh M, C, N thẳng hàng.

Bài 10: Cho tam giác ABC cân tại A và M là trung điểm của BC. Lấy các điểm D, E theo thứ tự thuộc các cạnh AB, AC sao cho góc DME bằng góc B.

- a) Chứng minh BDM đồng dạng với CME
- b) Chứng minh BD.CE không đổi.
- c) Chứng minh DM là phân giác của góc BDE

Bài 11: Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 6\text{cm}$; $AC = 8\text{cm}$. Vẽ đường cao AH ($H \in BC$)

- a) Tính độ dài cạnh BC .
- b) Chứng minh tam giác HBA đồng dạng với tam giác ABC
- c) Vẽ phân giác AD của góc A ($D \in BC$) . Chứng minh rằng điểm H nằm giữa hai điểm B và D .

Bài 12: Cho hình bình hành ABCD với đường chéo $AC > BD$. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD; gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

- a) Chứng minh rằng 2 tam giác CBG và ACF đồng dạng
- b) Chứng minh rằng : $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 13: Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I. Chứng minh rằng:

- a) Tam giác CIN vuông
- b) Tính diện tích tam giác CIN theo a.
- c) Tam giác AID cân.

Bài 14: Cho hình thang ABCD ($BC \parallel AD$) với $\angle ABC = \angle ACD$. Tính độ dài đường chéo AC, biết rằng 2 đáy BC và AD theo thứ tự có độ dài 12 m, 27 m.

Bài 15: Cho tam giác ABC, M là Trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ $Ex \parallel AM$. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: $FE + EG = 2 AM$

Bài 16: Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

- a) Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$
- b) Chứng minh rằng $ID^2 = IM.IN$

Bài 17: Cho tam giác ABC, đường phân giác trong của C cắt cạnh AB tại D. Chứng minh rằng $CD^2 < CA.CB$

Bài 18: Cho tam giác ABC, BD và CE là 2 đường cao của tam giác ABC. DF và EG là 2 đường cao của tam giác ADE. Chứng minh rằng:

- a) Hai tam giác ADE và ABC đồng dạng
- b) $FG \parallel BC$

Bài 19: Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

- So sánh BAH và CAH
- So sánh 2 đoạn thẳng BD và CE
- Chứng minh rằng 2 tam giác ADE và tam giác ABC đồng dạng

Bài 20: Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD ở K. Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC ở P. Chứng minh rằng $MP \parallel DC$.

Bài 21: Trong tam giác ABC kẻ trung tuyến AM. K là 1 điểm trên AM sao cho: $\frac{AK}{AM} = \frac{1}{3}$, BK cắt AC tại N.

- Tính diện tích tam giác AKN, biết diện tích tam giác ABC là S.
- Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại I và J.
- Chứng minh rằng $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

Bài 22: Lấy 1 điểm O trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$

Bài 23: Cho đoạn thẳng AB, gọi O là trung điểm của AB. Về về 1 phía AB, các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy C trên Ax, D trên By sao cho góc COD = 90° .

- Chứng minh rằng tam giác ACO đồng dạng với tam giác BDO.
- Chứng minh rằng $CD = AC + BD$.
- Kẻ OM vuông góc CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng $MN \parallel AC$

Bài 24: Cho tam giác ABC với $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 7$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của 2 tia phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng $GO \parallel AC$.

Bài 25: Cho hình vuông ABCD trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{BC}{3}$, trên tia đối của tia CD lấy N sao cho $CN = \frac{AD}{2}$. I là giao điểm của tia AM và BN. Chứng minh rằng 5 điểm A, B, I, C, D cùng cách đều 1 điểm.

Bài 26: Cho tam giác ABC, trung tuyến CM. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM, đường thẳng d cắt BC tại R và cắt AC tại P. Chứng minh nếu $QA \cdot QB = QP \cdot QR$ thì tam giác ABC vuông tại C.

Bài 27: Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC cố định lấy M, N, P sao cho: $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA} = k$ ($k > 0$).

- Tính $S_{\Delta MNP}$ theo $S_{\Delta ABC}$ và theo k

b) Tính k sao cho $S_{\Delta MNP}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Bài 28: Cho tam giác ABC ($AB=AC$) có góc ở đỉnh bằng 20° ; cạnh đáy là a; cạnh bên là b. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$

Bài 29: Cho 4 điểm A,E,F,B theo thứ tự ấy trên 1 đường thẳng. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông ABCD; FGHE.

a) Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng các tam giác OHE và OBC đồng dạng.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng CE và FD cùng đi qua O.

Bài 30: Cho tam giác ABC có $AB = 4, BC = 6, CA = 8$. Các đường phân giác trong AD và BE cắt nhau tại I.

a) Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD.

b) Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $IG \parallel BC$ suy ra độ dài IG

Bài 31: Cho ΔABC có $\hat{A} = 30^\circ$. Dựng bên ngoài ΔABC đều. Chứng minh $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài 32: Cho hình vuông ABCD, trên BC lấy M sao cho: $BM = \frac{1}{3}BC$. Trên tia đối của tia CD lấy điểm N sao cho $CN = \frac{1}{2}BC$. Cạnh AM cắt BN tại I và CI cắt AB tại K. Gọi H là hình chiếu của M trên AC. Chứng minh rằng K,M,H thẳng hàng.

Bài 33: Cho hình thang ABCD có 2 đáy là $AB = 2a; CD = a$. Hãy xác định vị trí điểm M trên đường thẳng CD sao cho đường thẳng AM chia hình thang thành 2 phần có diện tích bằng nhau.

Bài 34: Cho tam giác ABC ($BC < AB$). Từ C vẽ đường vuông góc với phân giác BE tại F và cắt AB tại K; vẽ trung tuyến BD cắt CK tại G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của GE.

Bài 35: Cho hình thoi ABCD có góc $A = 60^\circ$. Gọi M là 1 điểm thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

a) Chứng minh $AB^2 = DM \cdot BN$

b) BM cắt DN tại P. Tính $\angle BPD$

Bài 36: Cho ΔABC , điểm M nằm trên cạnh BC. Chứng minh: $MA \cdot BC < MC \cdot AB + MB \cdot AC$.

Bài 37: Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90^\circ$). Từ B kẻ BM vuông góc với AC. Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$.

Bài 38: Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của BO,AO. Lấy điểm F trên cạnh AB sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh rằng:

a) $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$

b) $BE + AK \geq BC$

Bài 39: Cho tam giác ABC ($AB = BC$). Trên cạnh AC chọn điểm K nằm giữa A và C. Trên tia đối của tia CA lấy E sao cho: $CE = AK$. Chứng minh: $BK + BE > BA + BC$

Bài 40: Cho tam giác ABC đều. Gọi M là 1 điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến 3 cạnh của tam giác có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong tam giác.

Bài 41: Cho tam giác ABC, qua 1 điểm O tùy ý trong tam giác, kẻ các đường AO, BO, CO cắt BC, CN, AB lần lượt tại M, N và P. Chứng minh rằng: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = 1$

Bài 42: Cho ΔABC có 2 đường cao BD và CE. Chứng minh: $AED = ACB$

Bài 43: Cho ΔABC có 2 đường phân giác AD. Chứng minh: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Bài 44: Cho tam giác ABC ($A < 90^\circ$). Bên ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Dựng hình bình hành AEIG. Chứng minh rằng:

- $\Delta ABC = \Delta GIA$ và $CI = BF$
- Ba đường thẳng AI, BF, CD đồng quy

Bài 45: Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm AB. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = 2EC$. Gọi O là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

- $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC}$
- $BO = 3EO$

Bài 46: Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AC tại E và cắt đường thẳng song song với AB kẻ từ C ở F. Gọi S là giao điểm của AC và BF.

Chứng minh rằng $SC^2 = SE.SA$

Bài 47: Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và K sao cho $AM = CK$. Trên AD lấy điểm P tùy ý. Đoạn thẳng MK lần lượt cắt PB và PC tại E và F. Chứng minh rằng $S_{FEP} = S_{BME} + S_{CKF}$

Bài 48: Cho đoạn thẳng AC = m. Lấy điểm B bất kì thuộc đoạn AC. Tia Bx $\perp$ AC. Trên tia Bx lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $BD = BA$ và $BE = BC$.

- Chứng minh rằng $CD = AE$ và $CD \perp AE$.
- Gọi M, N lần lượt là Trung điểm của AE, CD. Gọi I là Trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm I đến AC không đổi khi B di chuyển trên đoạn AC.
- Tìm vị trí của điểm B trên đoạn AC sao cho tổng diện tích 2 tam giác ABE và BCD có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất này theo m

Bài 49: Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy M. Vẽ BH vuông góc với CM. Nối DH. Vẽ $HN \perp DH$. Chứng minh :

- DHC đồng dạng với ΔNHB
- $AM.NB = NC.MB$

Bài 50: Cho hình bình hành ABCD. Gọi M,N là trung điểm của BC,AD. Gọi K là điểm nằm giữa C và D. Gọi P,Q theo thứ tự là các điểm đối xứng của K qua tâm M và N.

- Chứng minh rằng Q,P,A,B thẳng hàng
- Gọi G là giao điểm của PN và QM. Chứng minh rằng GK luôn đi qua điểm I cố định khi K thay đổi trên đoạn CD.

Bài 51: Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài của tam giác ta vẽ các hình vuông ABDE và ACGH.

- Chứng minh rằng BCHE là hình thang cân.
- Kẻ đường cao AK của tam giác ABC. CMR: các đường thẳng AK, DE, GH đồng quy.

Bài 52: Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A song song với BC, cắt BD tại P và đường thẳng qua B song song với AD cắt AC tại Q. Chứng minh PQ//CD.

Bài 53: Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC,CN lần lượt lấy các điểm M,N,P, lần lượt đặt diện tích các tam giác ANP, MBP, MNC, ABC là S_1, S_2, S_3, S .

- Chứng minh: $\frac{S_1}{S} = \frac{AN \cdot AP}{AC \cdot AB}$
- Chứng minh: $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \leq \frac{1}{64} S^3$

Bài 54: Cho tứ giác ABCD có AC = 10 cm, BD = 12. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết $\angle AOB = 30^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.