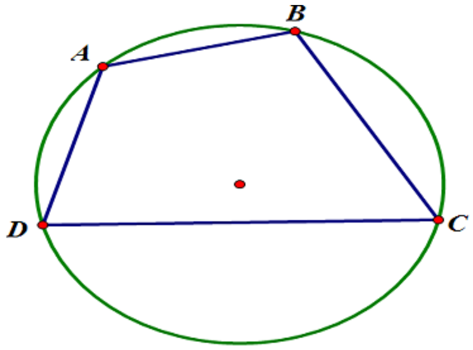
CHUYÊN ĐỀ : TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. LÝ THUYẾT

1) Định nghĩa

Tứ giác nội tiếp trong một đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn.



2) Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn:

- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó thì nội tiếp được trong một đường tròn.
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc (an-pha) thì nội tiếp được trong một đường tròn.

3) Phương pháp chứng minh

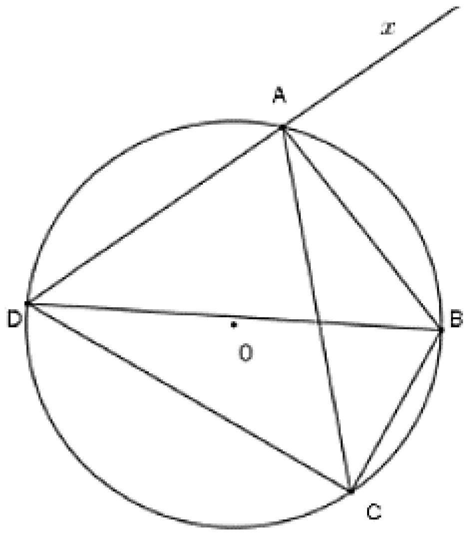
Chứng minh tứ giác nội tiếp một đường tròn theo một trong các cách sau đây:

- Chứng minh tổng hai góc đối diện trong một tứ giác bằng 180^0.
- Chứng minh hai điểm nhìn hai điểm còn lại dưới cùng một góc .
- Tứ giác ABCD có AC cắt BD tại M mà MA.MC = MB.MD thì tứ giác ABCD nội tiếp.
- Tứ giác có hai cạnh bên AB và CD giao nhau tại M mà MA.MB = MC.MD thì tứ giác ABCD nội tiếp.

B. BÀI TẬP

B1. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) như hình vẽ. Chọn khẳng định sai?



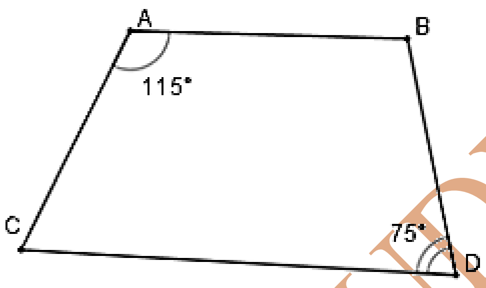
A. $BDC = BAC$

B. $ABC + ADC = 180^o$

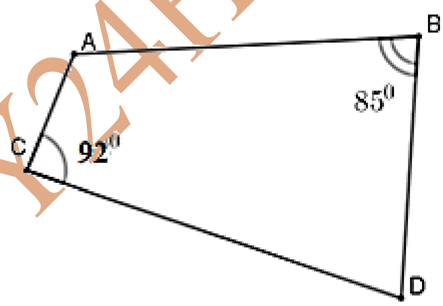
C. $DCB = BAx$

D. $BCA = BAx$

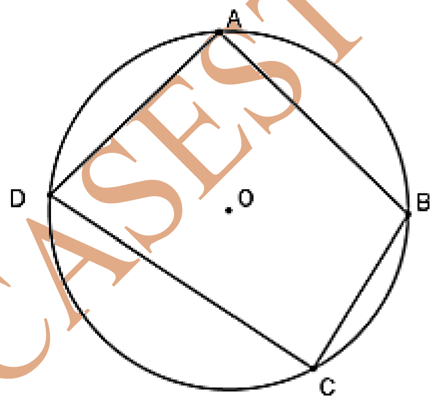
Câu 2: Tứ giác ở hình nào dưới đây là tứ giác nội tiếp?



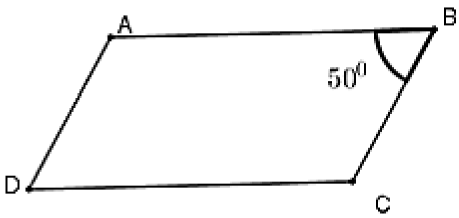
Hình 2



Hình 3



Hình 4



Hình 5

A. Hình 2

B. Hình 3

C. Hình 4

D. Hình 5

Câu 3: Cho tứ giác ABCD có số đo các góc A, B, C, D lần lượt như sau. Trường hợp nào thì tứ giác ABCD có thể là tứ giác nội tiếp:

A. 50^o; 60^o; 130^o; 140^o.

B. 65^o; 85^o; 115^o; 95^o.

C. 82^o; 90^o; 98^o; 100^o.

D. Các câu đều sai

Câu 4: Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính BC. Lấy điểm A trên tia đối của tia CB. Kẻ tiếp tuyến AF, Bx của nửa đường tròn (O) (với F là tiếp điểm). Tia AF cắt tia Bx của nửa đường tròn tại D. Khi đó tứ giác OBDF là:

A. Hình thang
C. Hình thang cân
B. Tứ giác nội tiếp
D. Hình bình hành

Câu 5: Cho tam giác ABC vuông tại A đường cao AH. Kẻ HE vuông góc với AB tại E, kẻ HF vuông góc với AC tại F. Chọn câu đúng:

A. Tứ giác BEFC là tứ giác nội tiếp
C. Tứ giác AFHE là hình vuông
B. Tứ giác BEFC không nội tiếp
D. Tứ giác AFHE không nội tiếp

Câu 6: Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn có hai cạnh đối AB và CD cắt nhau tại M và $BAD = 70^o$, giá trị góc $BCM = ?$

A. 110^o
C. 70^o
B. 30^o
D. 55^o

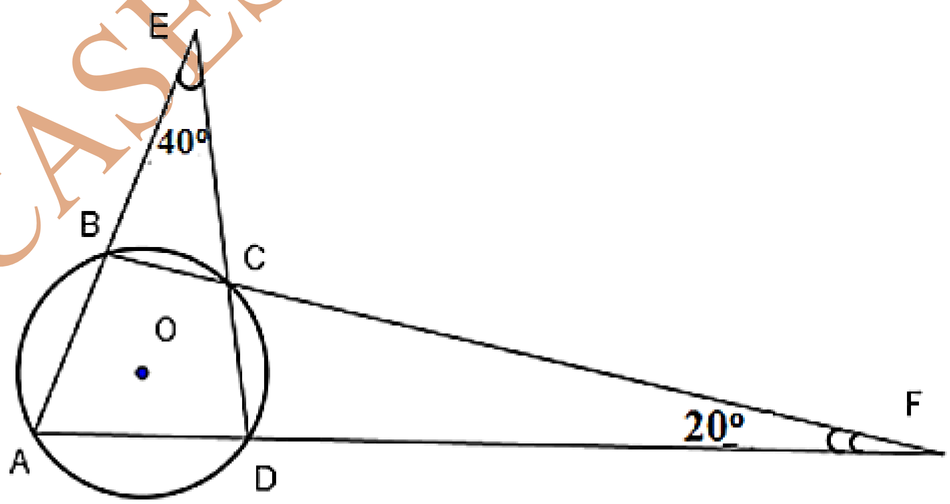
Câu 7: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E kẻ CK vuông góc AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Chọn câu đúng:

A. AHCK là tứ giác nội tiếp
C. $EAO = HCK$
B. AHCK không nội tiếp đường tròn
D. AH.AB = AD.BD

Câu 8: Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là tiếp điểm). Chọn đáp án đúng:

A. Tứ giác ABOC là hình thoi
C. Tứ giác ABOC không nội tiếp
B. Tứ giác ABOC nội tiếp
D. Tứ giác ABOC là hình bình hành

Câu 9: Cho hình vẽ dưới đây, chọn đáp án đúng:



A. $ABC = 80^o$
C. $ABC = 100^o$
B. $ABC = 90^o$
D. $ABC = 110^o$

Câu 10: Cho ΔABC cân tại A có góc BAC = 120°. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, lấy D sao cho BCD là tam giác đều. Khi đó:

A. ΔACD cân
B. ABDC nội tiếp
C. ABDC là hình thang
D. ABDC là hình vuông

Câu 11: Cho ΔABC cân tại A có góc BAC = 130°. Trên nửa mặt phẳng bờ BC không chứa đỉnh A, kẻ Bx ⊥ BA; Cy ⊥ CA, Bx và Cy cắt nhau tại D. Chọn đáp án sai:

A. Tam giác BCD cân
B. Tứ giác ABCD nội tiếp
C. Tứ giác ABCD là hình thoi
D. Góc BDC = 50°

Câu 12: Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O). M là điểm thuộc cung nhỏ AC (cung CM < cung AM). Vẽ MH vuông góc với BC tại H, vẽ MI vuông góc với AC tại I. Chọn câu đúng:

A. MIHC là hình chữ nhật
B. MIHC là hình vuông
C. MIHC không là tứ giác nội tiếp
D. MIHC là tứ giác nội tiếp

Câu 13: Cho hình bình hành ABCD. Đường tròn đi qua ba đỉnh A, B, C cắt đường thẳng CD tại P (P ≠ C). Khi đó:

A. ABCP là hình thang cân
B. AP = AD
C. AP = BC
D. Cả A, B, C đều đúng

Câu 14: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E, kẻ CK ⊥ AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Tứ giác AHCK là:

A. Tứ giác nội tiếp
B. Hình bình hành
C. Hình thang
D. Hình thoi

Câu 15: Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi H là điểm nằm giữa O và B. Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H. Trên cung nhỏ AC lấy điểm E, kẻ CK ⊥ AE tại K. Đường thẳng DE cắt CK tại F. Tam giác ACF là tam giác?

A. Cân tại F
B. Cân tại C
C. Cân tại A
D. Đều

B2. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài 1. Cho ΔABC vuông ở A. Trên AC lấy diểm M và vẽ đường tròn đường kính MC. Kẻ BM cắt đường tròn tại D. Đường thẳng DA cắt Đường tròn tại S. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD nội tiếp.

a) $ABD = ACD$

b) CA là phân giác của SCB

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AD. Chứng minh:

a) Tứ giác ABEF, tứ giác DCEF nội tiếp .

b) CA là phân giác của BCF .

c) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh tứ giác BCMF nội tiếp

Bài 3. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Hình chiếu vuông góc của E trên AD là F. Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Giao điểm của BD và CF là N. Chứng minh:

a) CEFD là tứ giác nội tiếp.

b) Tia FA là tia phân giác của góc BFM.

c) BE . DN = EN . BD

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD , AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F , G. Chứng minh:

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.

b) Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp được trong một đường tròn.

c) AC song song với FG.

d) Các đường thẳng AC, DE và BF đồng quy.

Bài 5. Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^0$; AB > AC) và một điểm M nằm trên đoạn AC (M không trùng với A và C). Gọi N và D lần lượt là giao điểm thứ hai của BC và MB với đương tròn đường kính MC; gọi S là giao điểm thứ hai giữa AD với đường tròn đường kính MC; T là giao điểm của MN và AB. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, M, N và B cùng thuộc một đường tròn.

b) CM là phân giác của góc BCS .

c) $\frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TB}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A dựng hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) và một cát tuyến bất kì cắt đường tròn tại P, Q. Gọi L là trung điểm của PQ.

a) Chứng minh 5 điểm: O; L; M; A; N cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh LA là phân giác của MLN

c) Gọi I là giao điểm của MN và LA. Chứng minh $MA^2 = AI.AL$

d) Gọi K là giao điểm của ML với (O). Chứng minh rằng KN // AQ.

e) Chứng minh ΔKLN cân.

Bài 7. Cho đường tròn (O;R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và AH < R. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

a) Chứng minh góc $\widehat{ABE}$ bằng góc $\widehat{EAH}$ và ΔABH đồng dạng với ΔEAH.

b) Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh AHEK là tứ giác nội tiếp.

c) Xác định vị trí điểm H để AB = $R\sqrt{3}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P. Chứng minh rằng:

a) Các tứ giác AEHF, BFHD nội tiếp.

b) Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c) AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.

d) H và M đối xứng nhau qua BC.

e) Xác định tâm đường tròn nội tiếp ΔDEF.

Bài 9. Cho ΔABC không cân, đường cao AH, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của B, C lên đường kính AD của đường tròn (O) và M, N thứ tự là trung điểm của BC, AB. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên đường tròn tâm N và HE// CD.

b) M là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔHEF.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của DE.

a) Chứng minh rằng: A,B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.

b) Chứng minh: HA là tia phân giác $\widehat{BHC}$.

c) Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh: AB^2 = AI.AH

d) BH cắt (O) tại K. Chứng minh: AE // CK.

Bài 11. Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SA, SB và cát tuyến SCD của đường tròn đó.

a) Gọi E là trung điểm của dây CD. Chứng minh 5 điểm S, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn.

b) Nếu SA = AO thì SAOB là hình gì? vì sao?

c) Chứmg minh rằng: $AC.BD = BC.DA = \dfrac{AB.CD}{2}$

Bài 12. Cho nửa đường tròn (O; R) đường kính AB. Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

a) Chứng minh AC. AE không đổi.

b) Chứng minh $ABD = DFB$.

c) Chứng minh rằng CEFD là tứ giác nội tiếp.

Bài 13. Trên đường thẳng d lấy ba điểm A,B,C theo thứ tự đó. Trên nửa mặt phẳng bờ d kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với đường thẳng. Trên tia Ax lấy I. Tia vuông góc với CI tại C cắt By tại K. Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P.

a) Chứng minh tứ giác CBPK nội tiếp được đường tròn.

b) Chứng minh AI.BK = AC.CB

c) Giả sử A, B, I cố định hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang vuông ABKI lớn nhất.

Bài 14. Cho ΔABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH, vẽ đường tròn đường kính AH, đường tròn này cắt AB tại E, cắt AC tại F.

a) Chứng minh AEHF là hình chữ nhật.

b) Chứng minh: BEFC là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh: AB.AE = AC.AF

d) Gọi M là là giao điểm của CE và BF. Hãy so sánh diện tích của tứ giác AEMF và diện tích của tam giác BMC.

Bài 15. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAHE.

a) Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp.

b) Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.

d) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

e) Tính độ dài DE biết DH = 2 cm, AH = 6 cm.

Bài 16. Từ điểm M ngoài đường tròn (O) vẽ 2 tiếp tuyến MA và MB. Trên cung nhỏ AB lấy điểm C. Vẽ CD ⊥ AB; CE ⊥ MA; CF ⊥ MB. Gọi I là giao điểm của AC và DE; K là giao điểm của BC và DF. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác AECD; BFCD là tứ giác nội tiếp.

b) CD^2 = CE.CF

c) IK ⊥ CD

Bài 17. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O). M là điểm di động trên cung nhỏ BC. Trên đoạn thẳng MA lấy điểm D sao cho MD = MC.

a) Chứng minh ΔDMC đều.

b) Chứng minh MB + MC = MA.
c) Chứng minh tứ giác ADOC nội tiếp.
d) Khi M Di động trên cung nhỏ BC thì D di động trên đường cố định nào ?

Bài 18. Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ AC ⊥ MB, BD ⊥ MA gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
c) Chứng minh OI.OM = R^2; OI. IM = IA^2.
d) Chứng minh OAHB là hình thoi.
e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
f) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d.

Bài 19. Cho 3 điểm A; B; C cố định thẳng hàng theo thứ tự. Vẽ đường tròn (O) bất kỳ đi qua B và C (BC không là đường kính của (O)). Kẻ từ các tiếp tuyến AE và AF đến (O) (E; F là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC; K là trung điểm của EF, giao điểm của FI với (O) là D. Chứng minh:

a) AE^2 = AB.AC
b) Tứ giác AEOF nội tiếp
c) Năm điểm A; E; O; I; F cùng nằm trên một đường tròn.
d) ED song song với Ac.
e) Khi (O) thay đổi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 20. Cho ΔABC có các góc đều nhọn và $A = 45^0$. Vẽ đường cao BD và CE của ΔABC. Gọi H là gia điểm của BD và CE.

a) Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp.
b) Tính tỉ số $\dfrac{DE}{BC}$
c) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Chứng minh OA ⊥ DE

Bài 21. Cho tam giác nhọn PBC. Gọi A là chân đường cao kẻ từ P xuống cạnh BC. Đường tròn đường kính BC cắt PB, PC lần lượt ở M và N. Nối N với A cắt đường tròn đường kính BC ở điểm thứ hai E.

a) Chứng minh rằng: 4 điểm A, B, N, P cùng nằm trên một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính đường tròn ấy.
b) Chứng minh: EM vuông góc với BC

c) Gọi F là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh rằng AM.AF = AN.AE

Bài 22. Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^0$); trên đoạn AC lấy điểm D (D không trùng với các điểm A và C). Đường tròn đường kính DC cắt BC tại các điểm thứ hai E; đường thẳng BD cắt đường tròn đường kính DC tại điểm F (F không trùng với D). Chứng minh:

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EDC.

b) Tứ giác ABCF nội tiếp đường tròn.

c) AC là tia phân giác của góc EAF.

Bài 23. Cho hình thang cân ABCD (AB>CD; AB//CD) nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a) Chứng minh: Tứ giác AEDI nội tiếp

b) Chứng minh AB//EI

c) Đường thẳng EI cắt cạnh bên AD và BC của hình thang tương ứng ở R và S. Chứng minh:

- I là trung điểm của RS
- $\dfrac{1}{AB} + \dfrac{1}{CD} = \dfrac{2}{RS}$

Bài 24. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AOB và COD vuông góc với nhau. Lấy điểm E bất kì trên OA, nối CE cắt đường tròn tại F. Qua F dựng tiếp tuyến Fx với đường tròn, qua E dựng Ey vuông góc với OA. Gọi I là giao điểm của Fx và Ey.

a) Chứng minh I; E; O; F cùng nằm trên một đường tròn.

b) Tứ giác CEIO là hình gì? vì sao?

c) Khi E chuyển động trên AB thì I chuyển động trên đường nào?

Bài 25. Cho nửa đường tròn đường kính BC bán kính R và điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Từ A hạ AH vuông góc với BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

a) Tứ giác AFHE là hình gì? Tại sao?

b) Chứng minh BEFC là tứ giác nội tiếp.

c) Hãy xác định vị trí của điểm A sao cho tứ giác AFHE có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

Bài 26. Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua hai điểm M, N. Từ P kẻ các tiếp tuyến PT, PT' với đường tròn (O)

a) Chứng minh: PT^2 = PM.PN. Từ đó suy ra khi (O) thay đổi vẫn qua M, N thì T, T' thuộc một đường tròn cố định.

b) Gọi giao điểm của TT' với PO, PM là I và J. K là trung điểm của MN.

Chứng minh các tứ giác OKTP, OKIJ nội tiếp.

c) Chứng minh rằng: Khi đường tròn (O) thay đổi vẫn đi qua M, N thì TT’ luôn đi qua điểm cố định.

d) Cho MN = NP = a. Tìm vị trí của tâm O để góc TPT’ = 60^0.

Bài 27. Cho ΔABC vuông ở A. Trên AC lấy điểm M (M≠A và C). Vẽ đường tròn đường kính MC. Gọi T là giao điểm thứ hai của cạnh BC với đường tròn. Nối BM kéo dài cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D. Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S. Chứng minh:

a) Tứ giác ABTM nội tiếp

b) Khi M chuyển động trên AC thì ADM có số đo không đổi.

c) AB//ST.

Bài 28. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Đường vuông góc với AB kẻ qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm C, D. Lấy M trên cung nhỏ BC của đường tròn (O). Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng MB với đường tròn (O') là N và giao điểm của hai đường thẳng CM, DN là P.

a) Tam giác AMN là tam giác gì, tại sao?

b) Chứng minh ACPD nội tiếp được đường tròn.

c) Gọi giao điểm thứ hai của AP với đường tròn (O') là Q, chứng minh BQ // CP.

Bài 29. Cho ΔABC vuông tại A (AB < AC). H bất kỳ nằm giữa A và C. Đường tròn (O) đường kính HC cắt BC tại I. BH cắt (O) tại D.

a) Chứng minh tứ giác ABCD nội tiếp.

b) AB cắt CD tại M. Chứng minh 3 điểm H; I; M thẳng hàng

c) AD cắt (O) tại K. Chứng minh CA là tia phân giác của KCB

Bài 30. Cho đường tròn (O), đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho AI = 2/3 AO. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I, gọi C là điểm tuỳ ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M, N và B. Nối AC cắt MN tại E.

a) Chứng minh tứ giác IECB nội tiếp .

b) Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM.

c) Chứng minh $AM^2 = AE.AC$.

d) Chứng minh $AE.\ AC - AI.IB = AI^2$.

e) Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.