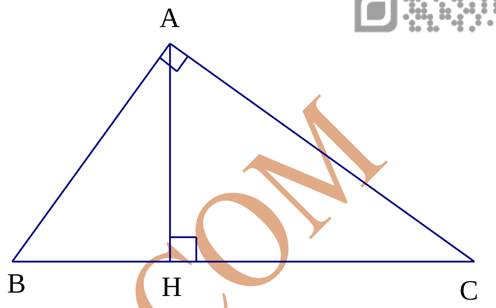
Chủ đề 1:
HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VUÔNG
TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC CỦA GÓC NHỌN

A. LÝ THUYẾT

1. Định lý Pitago

ΔABC vuông tại A $\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 = BC^2$

2. Hệ thức lượng trong tam giác vuông



a) $AB^2 = BH.BC$; $AC^2 = CH.BC$

b) $AB.AC = AH.BC$

c) $AH^2 = BH.HC$

d) $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$

Hệ quả:

➔ Với tam giác đều cạnh là a, ta có: $h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$; $S = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$

3. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

Đặt $ACB = \alpha$; $ABC = \beta$ khi đó:

$\sin\alpha = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{AH}{AC}$; $\cos\alpha = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{HC}{AC}$; $tg\alpha = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AH}{HC}$; $\cot g\alpha = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{HC}{AH}$

$b = a\sin B = a\cos C = ctgB = c\cot gC$

$c = a\cos B = a\sin C = bctgB = btgC$

Hệ quả:

1) $\sin\alpha = \cos\beta$; $\cos\alpha = \sin\beta$; $tg\alpha = \cot g\beta$; $\cot g\alpha = tg\beta$

2) $0 < \sin\alpha < 1$; $0 < \cos\alpha < 1$; $tg\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cot g\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

3) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $tg\alpha.\cot g\alpha = 1$; $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \cot g\alpha$; $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg\alpha$

4) Cho ΔABC nhọn, BC = a; AC = b; AB = c khi đó:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A; \quad S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\sin A$$

Chủ đề 2:
CHỨNG MINH BẰNG NHAU – SONG SONG,
VUÔNG GÓC - ĐỒNG QUY, THẲNG HÀNG

A. LÝ THUYẾT

1. Tam giác bằng nhau

a) Khái niệm: $\Delta ABC = \Delta A'B'C' \Leftrightarrow \begin{cases} A = A'; B = B'; C = C' \\ AB = A'B'; BC = B'C'; AC = A'C' \end{cases}$

b) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác: c.c.c; c.g.c; g.c.g.

c) Các trường hợp bằng nhau của hai tam giác vuông: hai cạnh góc vuông; cạnh huyền và một cạnh góc vuông; cạnh huyền và một góc nhọn.

d) Hệ quả: Hai tam giác bằng nhau thì các đường cao; các đường phân giác; các đường trung tuyến tương ứng bằng nhau.

2. Chứng minh hai góc bằng nhau

- Dùng hai tam giác bằng nhau hoặc hai tam giác đồng dạng, hai góc của tam giác cân, đều; hai góc của hình thang cân, hình bình hành, …
- Dùng quan hệ giữa các góc trung gian với các góc cần chứng minh.
- Dùng quan hệ các góc tạo bởi các đường thẳng song song, đối đỉnh.
- Dùng mối quan hệ của các góc với đường tròn. (Chứng minh 2 góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc hai cung bằng nhau của một đường tròn, …)

3. Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

- Dùng đoạn thẳng trung gian.
- Dùng hai tam giác bằng nhau.
- Ứng dụng tính chất đặc biệt của tam giác cân, tam giác đều, trung tuyến ứng với cạnh huyền của tam giác vuông, hình thang cân, hình chữ nhật, …
- Sử dụng các yếu tố của đường tròn: hai dây cung của hai cung bằng nhau, hai đường kính của một đường tròn, …
- Dùng tính chất đường trung bình của tam giác, hình thang, …

4. Chứng minh hai đường thẳng, hai đoạn thẳng song song

- Dùng mối quan hệ giữa các góc: So le bằng nhau, đồng vị bằng nhau, trong cùng phía bù nhau, …
- Dùng mối quan hệ cùng song song, vuông góc với đường thẳng thứ ba.
- Áp dụng định lý đảo của định lý Talet.
- Áp dụng tính chất của các tứ giác đặc biệt, đường trung bình của tam giác.
- Dùng tính chất hai dây chắn giữa hai cung bằng nhau của một đường tròn.

5. Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

- Chứng minh chúng song song với hai đường vuông góc khác.
- Dùng tính chất: đường thẳng vuông góc với một trong hai đường thẳng song song thì vuông góc với đường thẳng còn lại.
- Dùng tính chất của đường cao và cạnh đối diện trong một tam giác.
- Đường kính đi qua trung điểm của dây.
- Phân giác của hai góc kề bù nhau.

6. Chứng minh ba điểm thẳng hàng

- Dùng tiên đề Ơclit: Nếu AB//d; BC//d thì A, B, C thẳng hàng.

- Áp dụng tính chất các điểm đặc biệt trong tam giác: trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp, …
- Chứng minh 2 tia tạo bởi ba điểm tạo thành góc bẹt: Nếu góc ABC bằng 180^0 thì A, B, C thẳng hàng.
- Áp dụng tính chất: Hai góc bằng nhau có hai cạnh nằm trên một đường thẳng và hai cạnh kia nằm trên hai nửa mặt phẳng với bờ là đường thẳng trên.
- Chứng minh AC là đường kính của đường tròn tâm B.

7. Chứng minh các đường thẳng đồng quy

- Áp dụng tính chất các đường đồng quy trong tam giác.
- Chứng minh các đường thẳng cùng đi qua một điểm: Ta chỉ ra hai đường thẳng cắt nhau tại một điểm và chứng minh đường thẳng còn lại đi qua điểm đó.
- Dùng định lý đảo của định lý Talet

Chủ đề 3:
CHỨNG MINH HAI TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG
HỆ THỨC HÌNH HỌC

A. LÝ THUYẾT

1. Tam giác đồng dạng

- Khái niệm: $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \ khi \begin{cases} A = A'; B = B'; C = C' \\ \dfrac{AB}{A'B'} = \dfrac{AC}{A'C'} = \dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$
- Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác: c – c – c; c – g – c; g – g.
- Các trường hợp đồng dạng của hai tam giác vuông: góc nhọn; hai cạnh góc vuông; cạnh huyền - cạnh góc vuông…
- Tính chất: Hai tam giác đồng dạng thì tỉ số hai đường cao, hai đường phân giác, hai đường trung tuyến tương ứng, hai chu vi bằng tỉ số đồng dạng; tỉ số hai diện tích bằng bình phương tỉ số đồng dạng.

2. Phương pháp chứng minh hệ thức hình học

- Dùng định lí Talet, tính chất đường phân giác, tam giác đồng dạng, các hệ thức lượng trong tam giác vuông, …
- Giả sử cần chứng minh MA.MB = MC.MD
- Chứng minh hai tam giác MAC và MDB đồng dạng hoặc hai tam giác MAD và MCB.
- Trong trường hợp 5 điểm đó cùng nằm trên một đường thẳng thì cần chứng minh các tích trên cùng bằng tích thứ ba.
- Nếu cần chứng minh MT^2 = MA.MB thì chứng minh hai tam giác MTA và MBT đồng dạng hoặc so sánh với tích thứ ba.

- Ngoài ra cần chú ý đến việc sử dụng các hệ thức trong tam giác vuông; phương tích của một điểm với đường tròn.

Chủ đề 4:
CHỨNG MINH TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. LÝ THUYẾT

Phương pháp chứng minh:

- Chứng minh bốn đỉnh của tứ giác cùng cách đều một điểm.
- Chứng minh tứ giác có hai góc đối diện bù nhau.
- Chứng minh hai đỉnh cùng nhìn đoạn thẳng tạo bởi hai điểm còn lại hai góc bằng nhau.
- Chứng minh tổng của góc ngoài tại một đỉnh với góc trong đối diện bù nhau.
- Nếu MA.MB = MC.MD hoặc NA.ND = NC.NB thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó $M = AB \cap CD;\ N = AD \cap BC$)
- Nếu PA.PC = PB.PD thì tứ giác ABCD nội tiếp. (Trong đó $P = AC \cap BD$)
- Chứng minh tứ giác đó là hình thang cân; hình chữ nhật; hình vuông; …

B. BÀI TẬP ÁP DỤNG TỔNG HỢP

Bài 1. Cho tam giác ABC có AB > AC, kẻ trung tuyến AM và đường cao AH. Chứng minh:

a) $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \dfrac{BC^2}{2}$

b) $AB^2 - AC^2 = 2BC.MH$

Bài 2. Cho hình thang ABCD (AB//CD có AB = 3cm; CD = 14cm; AC = 15cm; BD = 8cm.

a) Chứng minh AC vuông góc với BD.

b) Tính diện tích hình thang.

Bài 3. Tính diện tích hình bình hành ABCD biết AD = 12; DC = 15**;** $\widehat{ADC} = 70^0$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến BD. Gọi I là hình chiếu của C trên BD, H là hình chiếu của I trên AC. Chứng minh: AH = 3HI.

Bài 5. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh bằng a, vẽ một đường thẳng cắt BC ở E và cắt đường thẳng DC ở F.

Chứng minh: $\dfrac{1}{AE^2} + \dfrac{1}{AF^2} = \dfrac{1}{a^2}$

Bài 6. Cho tam giác cân ABC có đáy BC = a; góc BAC = 2α; $\alpha < 45^0$. Kẻ các đường cao AE, BF.

a) Tính các cạnh của tam giác BFC theo a và tỉ số lượng giác của góc α.

b) Tính theo a, theo các tỉ số lượng giác của góc α và 2α, các cạnh của tam giác ABF, BFC.

c) Từ các kết quả trên, chứng minh các đẳng thức sau:

1) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$; 3) $tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

Bài 7. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N ,P.

Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CEHD, nội tiếp .

b) Bốn điểm B,C,E,F cùng nằm trên một đường tròn.

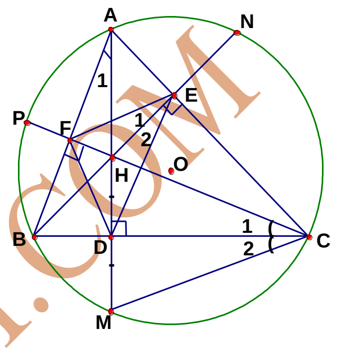
c) AE.AC = AH.AD; AD.BC = BE.AC.

d) H và M đối xứng nhau qua BC.

e) Xác định tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

<u>Lời giải.</u>

a. Xét tứ giác CEHD ta có:



CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> CEH + CDH = 180^0

Mà CEH và CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD.

Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp.

b. Theo giả thiết:

BE là đường cao => BE ⊥ AC => BEC = 90^0.

CF là đường cao => CF ⊥ AB => BFC = 90^0.

Như vậy E và F cùng nhìn BC dưới một góc 90^0 => E và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC.

Vậy bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.

c. Xét hai tam giác AEH và ADC ta có: AEH = ADC = 90^0 ; Â là góc chung

=> Δ AEH ~ ΔADC => $\frac{AE}{AD}=\frac{AH}{AC}$ => AE.AC = AH.AD.

* Xét hai tam giác BEC và ADC ta có: BEC = ADC = 90^0 ; C là góc chung

=> Δ BEC ~ ΔADC => $\frac{BE}{AD}=\frac{BC}{AC}$ => AD.BC = BE.AC.

d. Ta có C_1 = A_1 (vì cùng phụ với góc ABC)

C_2 = A_1 (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

=> C_1 = C_2 => CB là tia phân giác của góc HCM; lại có CB ⊥ HM => Δ CHM cân tại C

=> CB cũng là đương trung trực của HM vậy H và M đối xứng nhau qua BC.

e. Theo chứng minh trên bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn

=> C_1 = E_1 (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung BF)

Cũng theo chứng minh trên CEHD là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ C_1 = E_2 (vì là hai góc nội tiếp cùng chắn cung HD)

$\Rightarrow$ E_1 = E_2 => EB là tia phân giác của góc FED .

Chứng minh tương tự ta cũng có FC là tia phân giác của góc DFE mà BE và CF cắt nhau tại H do đó H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 8. Cho nửa đường tròn đường kính AB = 2R. Từ A và B kẻ hai tiếp tuyến Ax, By. Qua điểm M thuộc nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba cắt các tiếp tuyến Ax , By lần lượt ở C và D. Các đường thẳng AD và BC cắt nhau tại N.

a) Chứng minh AC + BD = CD.

b) Chứng minh $COD = 90^0$.

c) Chứng minh AC. BD = $\dfrac{AB^2}{4}$.

d) Chứng minh OC // BM

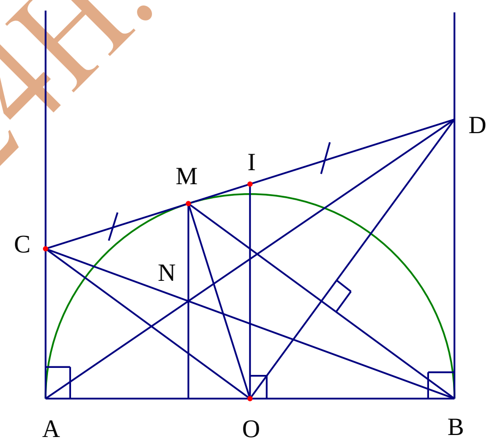
e) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

f) Chứng minh MN ⊥ AB.

g) Xác định vị trí của M để chu vi tứ giác ACDB đạt giá trị nhỏ nhất.

<u>Lời giải:</u>

a. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có:



$$\begin{cases} CA = CM \\ DB = DM \end{cases} \Rightarrow AC + BD = CM + DM.$$

Mà CM + DM = CD => AC + BD = CD.

b. Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: OC là tia phân giác của góc AOM ; OD là tia phân giác của góc BOM. Mà AOM và BOM là hai góc kề bù => $COD = 90^0$.

c. Theo trên $COD = 90^0$ nên ΔCOD vuông tại O có OM ⊥ CD (OM là tiếp tuyến).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao trong tam giác vuông ta có : OM^2 = CM. DM,

Mà OM = R; CA = CM; DB = DM => AC. BD =R^2 => AC. BD = $\dfrac{AB^2}{4}$.

d. Theo trên $COD = 90^0$ nên OC ⊥ OD (1)

Theo tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau ta có: DB = DM; lại có OM = OB =R => OD là trung trực của BM => BM ⊥ OD .(2). Từ (1) Và (2) => OC // BM (Vì cùng vuông góc với OD).

e. Gọi I là trung điểm của CD ta có I là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔCOD đường kính CD có IO là bán kính.

Theo tính chất tiếp tuyến ta có AC ⊥ AB; BD ⊥ AB => AC // BD => tứ giác ACDB là hình thang. Lại có I là trung điểm của CD; O là trung điểm của AB => IO là đường trung bình của hình thang ACDB

$\Rightarrow$ IO // AC , mà AC ⊥ AB => IO ⊥ AB tại O => AB là tiếp tuyến tại O của đường tròn đường kính CD.

f. Theo trên AC // BD => $\frac{CN}{BN}=\frac{AC}{BD}$, mà CA = CM; DB = DM nên suy ra $\frac{CN}{BN}=\frac{CM}{DM}$

=> MN // BD mà BD ⊥ AB => MN ⊥ AB.

g. (HD): Ta có chu vi tứ giác ACDB = AB + AC + CD + BD mà AC + BD = CD nên suy ra chu vi tứ giác ACDB = AB + 2CD mà AB không đổi nên chu vi tứ giác ACDB nhỏ nhất khi CD nhỏ nhất , mà CD nhỏ nhất khi CD là khoảng cách giữ Ax và By tức là CD vuông góc với Ax và By. Khi đó CD // AB => M phải là trung điểm của cung AB.

Bài 9. Cho tam giác cân ABC (AB = AC), các đường cao AD, BE, cắt nhau tại H. Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AHE.

a) Chứng minh tứ giác CEHD nội tiếp .

b) Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

c) Chứng minh ED = $\frac{1}{2}$BC.

d) Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O).

e) Tính độ dài DE biết DH = 2 Cm, AH = 6 Cm.

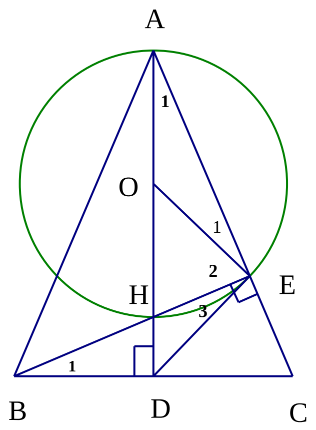
<u>**Lời giải:**</u>

a. Xét tứ giác CEHD ta có:

CEH = 90^0 (Vì BE là đường cao)

CDH = 90^0 (Vì AD là đường cao)

=> CEH + CDH = 180^0



Mà CEH và CDH là hai góc đối của tứ giác CEHD.

Do đó CEHD là tứ giác nội tiếp.

b. Theo giả thiết : BE là đường cao => BE ⊥ AC => BEA = 90^0.

AD là đường cao => AD ⊥ BC => BDA = 90^0.

Như vậy E và D cùng nhìn AB dưới một góc 90^0 => E và D cùng nằm trên đường tròn đường kính AB.

Vậy bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.

c. Theo giả thiết tam giác ABC cân tại A có AD là đường cao nên cũng là đường trung tuyến => D là trung điểm của BC. Theo trên ta có BEC = 90^0 .

Vậy ΔBEC vuông tại E có ED là trung tuyến => DE = $\frac{1}{2}$BC.

d. Vì O là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔAHE nên O là trung điểm của AH => OA = OE => ΔAOE cân tại O => E_1 = A_1 (1).

Theo trên DE = $\frac{1}{2}$BC => ΔDBE cân tại D => E_3 = B_1 (2)

Mà B_1 = A_1 (vì cùng phụ với góc ACB) => E_1 = E_3

=> $E_1 + E_2 = E_2 + E_3$. Mà $E_1 + E_2 = BEA = 90^0$ => $E_2 + E_3 = 90^0 = OED$

=> $DE \perp OE$ tại E.

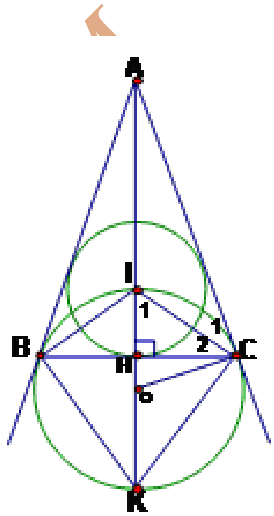
Vậy DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) tại E.

e. Theo giả thiết AH = 6 cm => OH = OE = 3 cm.; DH = 2 Cm => OD = 5 cm. Áp dụng định lí Pitago cho ΔOED vuông tại E ta có $ED^2 = OD^2 - OE^2 \Leftrightarrow ED^2 = 5^2 - 3^2 \Leftrightarrow ED = 4$cm.

Bài 10: Cho tam giác cân ABC (AB = AC), I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A , O là trung điểm của IK.

a) Chứng minh B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn.
b) Chứng minh AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
c) Tính bán kính đường tròn (O) Biết AB = AC = 20 cm, BC = 24 cm.

<u>Lời giải:</u>



a. Vì I là tâm đường tròn nội tiếp, K là tâm đường tròn bàng tiếp góc A nên BI và BK là hai tia phân giác của hai góc kề bù đỉnh B.

Do đó $BI \perp BK$ hay $IBK = 90^0$.

Tương tự ta cũng có $ICK = 90^0$ như vậy B và C cùng nằm trên đường tròn đường kính IK do đó B, C, I, K cùng nằm trên một đường tròn

b. Ta có $C_1 = C_2$ (1) (vì CI là phân giác của góc ACH).

$C_2 + \hat{I}_1 = 90^0$ (2) (vì $IHC = 90^0$).

$\hat{I}_1 = ICO$ (3) (vì ΔOIC cân tại O)

Từ (1), (2) , (3) => $C_1 + ICO = 90^0$ hay $AC \perp OC$.

Vậy AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).

c. Từ giả thiết AB = AC = 20 Cm, BC = 24 Cm => CH = 12 cm.

$$AH^2 = AC^2 - HC^2 \Rightarrow AH = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16 \text{ (cm)}$$

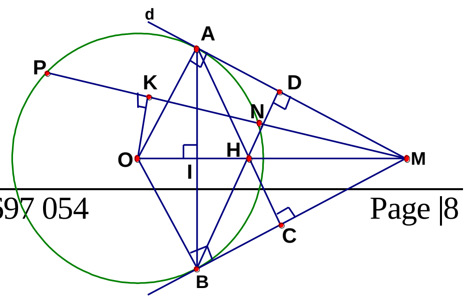
$$CH^2 = AH.OH \Rightarrow OH = \frac{CH^2}{AH} = \frac{12^2}{16} = 9 \text{ (cm)}$$

$$OC = \sqrt{OH^2 + HC^2} = \sqrt{9^2 + 12^2} = \sqrt{225} = 15 \text{ (cm)}.$$

Bài 11. Cho đường tròn (O; R), từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O). Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP, kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$, gọi H là giao điểm của AC và BD, I là giao điểm của OM và AB.

a) Chứng minh tứ giác AMBO nội tiếp.
b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
c) Chứng minh $OI.OM = R^2$; $OI. IM = IA^2$.
d) Chứng minh OAHB là hình thoi.
e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
f) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d

<u>Lời giải:</u>



a. (HS tự làm).

b. Vì K là trung điểm NP nên OK ⊥ NP (quan hệ đường kính và dây cung) => $\widehat{OKM} = 90^0$. Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAM} = 90^0$; $\widehat{OBM} = 90^0$. Như vậy K, A, B cùng nhìn OM dưới một góc 90^0 nên cùng nằm trên đường tròn đường kính OM.

Vậy năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn.

c. Ta có MA = MB (t/c hai tiếp tuyến cắt nhau); OA = OB = R

=> OM là trung trực của AB => OM ⊥ AB tại I .

Theo tính chất tiếp tuyến ta có $\widehat{OAM} = 90^0$ nên ΔOAM vuông tại A có AI là đường cao.

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $OI.OM = OA^2$ hay $OI.OM = R^2$; và $OI.\ IM = IA^2$.

d. Ta có OB ⊥ MB (tính chất tiếp tuyến) ; AC ⊥ MB (gt) => OB // AC hay OB // AH.

OA ⊥ MA (tính chất tiếp tuyến) ; BD ⊥ MA (gt) => OA // BD hay OA // BH.

=> Tứ giác OAHB là hình bình hành; lại có OA = OB (=R) => OAHB là hình thoi.

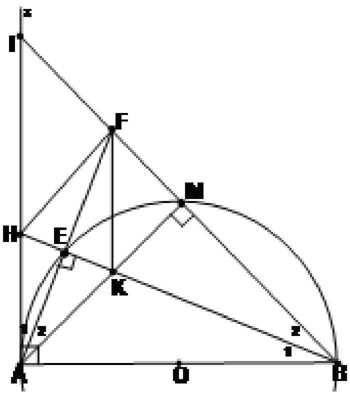
e. Theo trên OAHB là hình thoi. => OH ⊥ AB; cũng theo trên OM ⊥ AB => O, H, M thẳng hàng(Vì qua O chỉ có một đường thẳng vuông góc với AB).

f. (HD) Theo trên OAHB là hình thoi. => AH = AO = R. Vậy khi M di động trên d thì H cũng di động nhưng luôn cách A cố định một khoảng bằng R. Do đó quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d là nửa đường tròn tâm A bán kính AH = R.

Bài 12. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB và điểm M bất kì trên nửa đường tròn (M khác A,B). Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến Ax. Tia BM cắt Ax tại I; tia phân giác của góc IAM cắt nửa đường tròn tại E; cắt tia BM tại F tia BE cắt Ax tại H, cắt AM tại K.

a) Chứng minh rằng: EFMK là tứ giác nội tiếp.
b) Chứng minh rằng: $AI^2 = IM . IB$.
c) Chứng minh BAF là tam giác cân.
d) Chứng minh rằng : Tứ giác AKFH là hình thoi.
e) Xác định vị trí M để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Lời giải:



a. Ta có : $\widehat{AMB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\widehat{KMF} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

$\widehat{AEB} = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\widehat{KEF} = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).

=> $\widehat{KMF} + \widehat{KEF} = 180^0$. Mà $\widehat{KMF}$ và $\widehat{KEF}$ là hai góc đối của tứ giác EFMK do đó EFMK là tứ giác nội tiếp.

b. Ta có $\angle IAB = 90^0$ (vì AI là tiếp tuyến) => ΔAIB vuông tại A có AM ⊥ IB (theo trên).

Áp dụng hệ thức giữa cạnh và đường cao => $AI^2 = IM . IB$.

c. Theo giả thiết AE là tia phân giác góc IAM => ∠IAE = ∠MAE => AE = ME (lí do ……)

=> ∠ABE =∠MBE (hai góc nội tiếp chắn hai cung bằng nhau) => BE là tia phân giác góc ABF. (1)

Theo trên ta có $\angle AEB = 90^0$ => $BE \perp AF$ hay BE là đường cao của tam giác ABF (2).

Từ (1) và (2) => BAF là tam giác cân. tại B .

d. BAF là tam giác cân. tại B có BE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của AF. (3)

Từ $BE \perp AF$ => $AF \perp HK$ (4), theo trên AE là tia phân giác góc IAM hay AE là tia phân giác $\angle HAK$ (5)

Từ (4) và (5) => HAK là tam giác cân. tại A có AE là đường cao nên đồng thời là đương trung tuyến => E là trung điểm của HK. (6).

Từ (3) , (4) và (6) => AKFH là hình thoi (vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường).

e. Theo trên AKFH là hình thoi => HA // FK hay IA // FK => tứ giác AKFI là hình thang.

Để tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn thì AKFI phải là hình thang cân.

AKFI là hình thang cân khi M là trung điểm của cung AB.

Thật vậy: M là trung điểm của cung AB => $\angle ABM = \angle MAI = 45^0$ (t/c góc nội tiếp). (7)

Tam giác ABI vuông tại A có $\angle ABI = 45^0$ => $\angle AIB = 45^0$.(8)

Từ (7) và (8) => $\angle IAK = \angle AIF = 45^0$ => AKFI là hình thang cân (hình thang có hai góc đáy bằng nhau).

Vậy khi M là trung điểm của cung AB thì tứ giác AKFI nội tiếp được một đường tròn.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông ở A (AB > AC), đường cao AH. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điển A. Vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E. Nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

a) Chứng minh AFHE là hình chữ nhật.
b) BEFC là tứ giác nội tiếp.
c) AE. AB = AF. AC.
d) Chứng minh EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn.

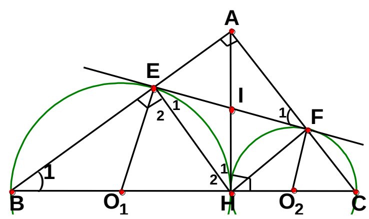
Lời giải:

a. Ta có : $\angle BEH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=> $\angle AEH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù). (1)

$\angle CFH = 90^0$ (nội tiếp chắn nửc đường tròn)

=> $\angle AFH = 90^0$ (vì là hai góc kề bù).(2)



$\angle EAF = 90^0$ (Vì tam giác ABC vuông tại A) (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác AFHE là hình chữ nhật (vì có ba góc vuông).

b. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật nên nội tiếp được một đường tròn =>$\angle F_1 = \angle H_1$ (nội tiếp chắn cung AE) . Theo giả thiết $AH \perp BC$ nên AH là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (O_1) và (O_2)

=> $\angle B_1 = \angle H_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung HE) => $\angle B_1 = \angle F_1$ => $\angle EBC + \angle EFC = \angle AFE + \angle EFC$ mà $\angle AFE + \angle EFC = 180^0$ (vì là hai góc kề bù) => $\angle EBC + \angle EFC = 180^0$ mặt khác $\angle EBC$ và $\angle EFC$ là hai góc đối của tứ giác BEFC do đó BEFC là tứ giác nội tiếp.

c. Xét hai tam giác AEF và ACB ta có $\angle A = 90^0$ là góc chung; $\angle AFE = \angle ABC$ (theo Chứng minh trên)

=> ΔAEF ~ΔACB => $\frac{AE}{AC}=\frac{AF}{AB}$ => AE. AB = AF. AC.

* **HD cách 2**: Tam giác AHB vuông tại H có HE ⊥ AB => AH^2 = AE.AB (*)

Tam giác AHC vuông tại H có HF ⊥ AC => AH^2 = AF.AC (**)

Từ (*) và (**) => AE. AB = AF. AC

d. Tứ giác AFHE là hình chữ nhật => IE = EH => ΔIEH cân tại I => $\angle E_1 = \angle H_1$.

ΔO_1EH cân tại O_1 (vì có O_1E vàO_1H cùng là bán kính) => $\angle E_2 = \angle H_2$.

=> $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle H_1 + \angle H_2$ mà $\angle H_1 + \angle H_2 = \angle AHB = 90^0$ => $\angle E_1 + \angle E_2 = \angle O_1EF = 90^0$

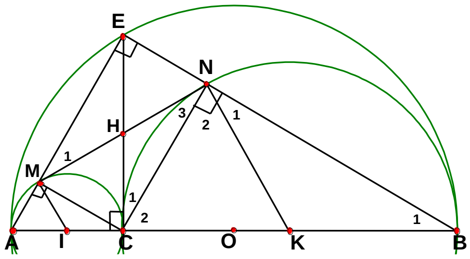
=> $O_1E \perp EF$.

Chứng minh tương tự ta cũng có $O_2F \perp EF$. Vậy EF là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn .

Bài 14. Cho điểm C thuộc đoạn thẳng AB sao cho AC = 10 Cm, CB = 40 Cm. Vẽ về một phía của AB các nửa đường tròn có đường kính theo thứ tự là AB, AC, CB và có tâm theo thứ tự là O, I, K. Đường vuông góc với AB tại C cắt nửa đường tròn (O) tại E. Gọi M. N theo thứ tự là giao điểm của EA, EB với các nửa đường tròn (I), (K).

a) Chứng minh EC = MN.
b) Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của các nửa đ/tròn (I), (K).
c) Tính MN.
d) Tính diện tích hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn

Lời giải:



a. Ta có: ∠BNC= 90^0(nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm K)

=> ∠ENC = 90^0 (vì là hai góc kề bù). (1)

∠AMC = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm I)

=> ∠EMC = 90^0 (vì là hai góc kề bù).(2)

∠AEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn tâm O) hay ∠MEN = 90^0 (3)

Từ (1), (2), (3) => tứ giác CMEN là hình chữ nhật => EC = MN (tính chất đường chéo hình chữ nhật)

b. Theo giả thiết EC ⊥AB tại C nên EC là tiếp tuyến chung của hai nửa đường tròn (I) và (K)

=> $\angle B_1 = \angle C_1$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung CN). Tứ giác CMEN là hình chữ nhật nên => $\angle C_1 = \angle N_3$

=> $\angle B_1 = \angle N_3$.(4) Lại có KB = KN (cùng là bán kính) => tam giác KBN cân tại K => $\angle B_1 = \angle N_1$ (5)

Từ (4) và (5) => $\angle N_1 = \angle N_3$ mà $\angle N_1 + \angle N_2 = \angle CNB = 90^0$ => $\angle N_3 + \angle N_2 = \angle MNK = 90^0$ hay MN ⊥ KN tại N => MN là tiếp tuyến của (K) tại N.

Chứng minh tương tự ta cũng có MN là tiếp tuyến của (I) tại M,

Vậy MN là tiếp tuyến chung của các nửa đường tròn (I), (K).

c. Ta có ∠AEB = 90^0 (nội tiếp chắn nửc đường tròn tâm O) => ΔAEB vuông tại A có EC ⊥ AB (gt)

=> EC^2 = AC. BC ⇔ EC^2 = 10.40 = 400 => EC = 20 cm. Theo trên EC = MN => MN = 20 cm.

d. Theo giả thiết AC = 10 Cm, CB = 40 Cm => AB = 50cm => OA = 25 cm

Ta có $S_{(o)} = \pi.OA^2 = \pi 25^2 = 625\pi$;

$S_{(I)} = \pi.IA^2 = \pi.5^2 = 25\pi$;

$S_{(k)} = \pi.KB^2 = \pi.20^2 = 400\pi$.

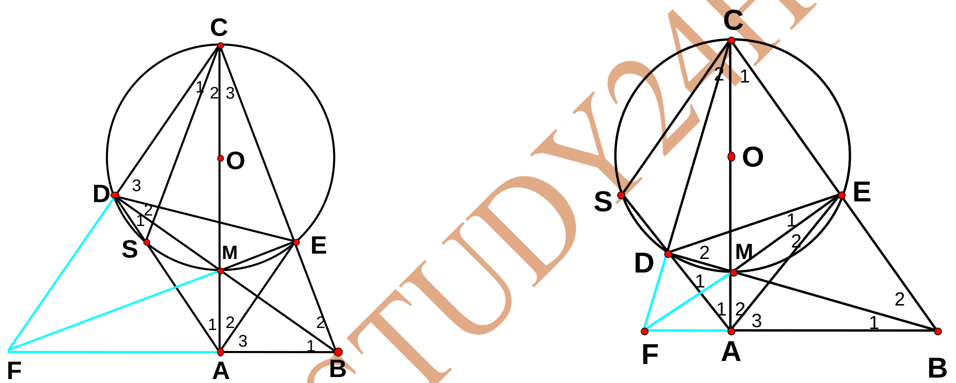
Ta có diện tích phần hình được giới hạn bởi ba nửa đường tròn là $S = \frac{1}{2}(S_{(o)} - S_{(I)} - S_{(k)})$

$S = \frac{1}{2}(625\pi - 25\pi - 400\pi) = \frac{1}{2}.200\pi = 100\pi \approx 314\ (cm^2)$

Bài 15. Cho tam giác ABC vuông ở A. Trên cạnh AC lấy điểm M, dựng đường tròn (O) có đường kính MC. đường thẳng BM cắt đường tròn (O) tại D. đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại S.

a) Chứng minh ABCD là tứ giác nội tiếp .
b) Chứng minh CA là tia phân giác của góc SCB.
c) Gọi E là giao điểm của BC với đường tròn (O). Chứng minh rằng các đường thẳng BA, EM, CD đồng quy.
d) Chứng minh DM là tia phân giác của góc ADE.
e) Chứng minh điểm M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE.

<u>Lời giải:</u>



Hình a *Hình b*

a. Ta có ∠CAB = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A); ∠MDC = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) => ∠CDB = 90^0 như vậy D và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và D cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => ABCD là tứ giác nội tiếp.

b. ABCD là tứ giác nội tiếp => $\angle D_1 = \angle C_3$(nội tiếp cùng chắn cung AB).

$\angle D_1 = \angle C_3$ => $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle C_2 = \angle C_3$ (hai góc nội tiếp đường tròn (O) chắn hai cung bằng nhau)

=> CA là tia phân giác của góc SCB.

c. Xét ΔCMB Ta có BA⊥CM; CD ⊥ BM; ME ⊥ BC như vậy BA, EM, CD là ba đường cao của tam giác CMB nên BA, EM, CD đồng quy.

d. Theo trên Ta có $\overset{\frown}{SM} = \overset{\frown}{EM}$ => $\angle D_1 = \angle D_2$ => DM là tia phân giác của góc ADE.(1)

e. Ta có ∠MEC = 90^0 (nội tiếp chắn nửa đường tròn (O)) => ∠MEB = 90^0.

Tứ giác AMEB có ∠MAB = 90^0 ; ∠MEB = 90^0 => ∠MAB + ∠MEB = 180^0 mà đây là hai góc đối nên tứ giác AMEB nội tiếp một đường tròn => $\angle A_2 = \angle B_2$.

Tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp => ∠A_1= ∠B_2(nội tiếp cùng chắn cung CD)

=> ∠A_1= ∠A_2 => AM là tia phân giác của góc DAE (2)

Từ (1) và (2) Ta có M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ADE

<u>TH2</u> (Hình b)

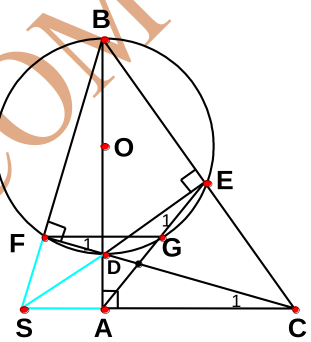
(ý b) : ∠ABC = ∠CME (cùng phụ ∠ACB); ∠ABC = ∠CDS (cùng **<u>bù</u>** ∠ADC) => ∠CME = ∠CDS

=> $CE = CS \Rightarrow SM = EM$ => ∠SCM = ∠ECM => CA là tia phân giác của góc SCB.

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông ở A.và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại F, G.

Chứng minh :

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.
b) Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp .
c) AC // FG.
d) Các đường thẳng AC, DE, FB đồng quy.



<u>Lời giải:</u>

a. Xét hai tam giác ABC và EDB

Ta có ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A);

∠DEB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> ∠DEB = ∠BAC = 90^0 ; lại có ∠ABC là góc chung => ΔDEB ~ Δ CAB .

b. Theo trên ∠DEB = 90^0 => ∠DEC = 90^0 (vì hai góc kề bù); ∠BAC = 90^0 (vì ΔABC vuông tại A) hay ∠DAC = 90^0 => ∠DEC + ∠DAC = 180^0 mà đây là hai góc đối nên ADEC là tứ giác nội tiếp .

***** ∠BAC = 90^0 (vì tam giác ABC vuông tại A);

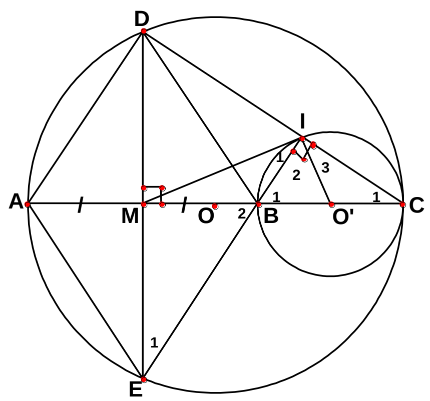
∠DFB = 90^0 (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay ∠BFC = 90^0 như vậy F và A cùng nhìn BC dưới một góc bằng 90^0 nên A và F cùng nằm trên đường tròn đường kính BC => AFBC là tứ giác nội tiếp.

c. Theo trên ADEC là tứ giác nội tiếp => ∠E_1 = ∠C_1 lại có ∠E_1 = ∠F_1 => ∠F_1 = ∠C_1 mà đây là hai góc so le trong nên suy ra AC // FG.

d. (HD) Dễ thấy CA, DE, BF là ba đường cao của tam giác DBC nên CA, DE, BF đồng quy tại S.

Bài 17. Cho đường tròn (O) đường kính AC. Trên bán kính OC lấy điểm B tuỳ ý (B khác O, C). Gọi M là trung điểm của đoạn AB. Qua M kẻ dây cung DE vuông góc với AB. Nối CD, Kẻ BI vuông góc với CD.

a) Chứng minh tứ giác BMDI nội tiếp .
b) Chứng minh tứ giác ADBE là hình thoi.
c) Chứng minh BI // AD.
d) Chứng minh I, B, E thẳng hàng.
e) Chứng minh MI là tiếp tuyến của (O’).



<u>Lời giải:</u>

a. $\angle BIC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BID = 90^0$ (vì là hai góc kề bù); DE $\perp$ AB tại M => $\angle BMD = 90^0$

=> $\angle BID + \angle BMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MBID nên MBID là tứ giác nội tiếp.

b. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

=> Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

c. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD $\perp$ DC; theo trên BI $\perp$ DC => BI // AD. (1)

d. Theo giả thiết ADBE là hình thoi => EB // AD (2).

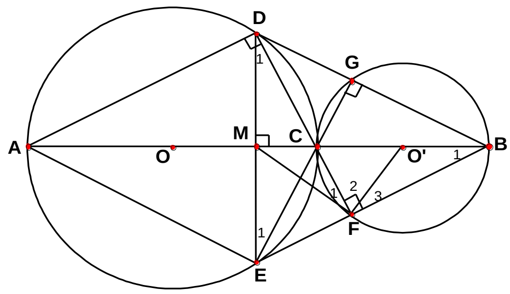
Từ (1) và (2) => I, B, E thẳng hàng (vì qua B chỉ có một đường thẳng song song với AD mà thôi.)

e. I, B, E thẳng hàng nên tam giác IDE vuông tại I => IM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE) =>MI = ME => ΔMIE cân tại M => $\angle I_1 = \angle E_1$; ΔO'IC cân tại O' (vì O'C và O'I cùng là bán kính)

=> $\angle I_3 = \angle C_1$ mà $\angle C_1 = \angle E_1$ (Cùng phụ với góc EDC) => $\angle I_1 = \angle I_3$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = \angle I_3 + \angle I_2$. Mà $\angle I_3 + \angle I_2 = \angle BIC = 90^0$ => $\angle I_1 + \angle I_2 = 90^0 = \angle MIO'$ hay MI $\perp$ O'I tại I => MI là tiếp tuyến của (O').

Bài 18. Cho đường tròn (O; R) và (O'; R') có R > R' tiếp xúc ngoài nhau tại C. Gọi AC và BC là hai đường kính đi qua điểm C của (O) và (O'). DE là dây cung của (O) vuông góc với AB tại trung điểm M của AB. Gọi giao điểm thứ hai của DC với (O') là F, BD cắt (O') tại G. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác MDGC nội tiếp .
b) Bốn điểm M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn
c) Tứ giác ADBE là hình thoi.
d) B, E, F thẳng hàng
e) DF, EG, AB đồng quy.
f) MF = 1/2 DE.
g) MF là tiếp tuyến của (O').



Lời giải:

a. $\angle BGC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn)

=> $\angle CGD = 90^0$ (vì là hai góc kề bù)

Theo giả thiết DE $\perp$ AB tại M => $\angle CMD = 90^0$

=> $\angle CGD + \angle CMD = 180^0$ mà đây là hai góc đối của tứ giác MCGD nên MCGD là tứ giác nội tiếp

b. $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => $\angle BFD = 90^0$; $\angle BMD = 90^0$ (vì DE $\perp$ AB tại M) như vậy F và M cùng nhìn BD dưới một góc bằng 90^0 nên F và M cùng nằm trên đường tròn đường kính BD => M, D, B, F cùng nằm trên một đường tròn .

3. Theo giả thiết M là trung điểm của AB; DE $\perp$ AB tại M nên M cũng là trung điểm của DE (quan hệ đường kính và dây cung)

$\Rightarrow$Tứ giác ADBE là hình thoi vì có hai đường chéo vuông góc với nhau tại trung điểm của mỗi đường .

c. $\angle ADC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => AD $\perp$ DF ; theo trên tứ giác ADBE là hình thoi

=> BE // AD mà AD $\perp$ DF nên suy ra BE $\perp$ DF .

Theo trên $\angle BFC = 90^0$ (nội tiếp chắn nửa đường tròn) => BF $\perp$ DF mà qua B chỉ có một đường thẳng vuông góc với DF do đo B, E, F thẳng hàng.

d. Theo trên DF $\perp$ BE; BM $\perp$ DE mà DF và BM cắt nhau tại C nên C là trực tâm của tam giác BDE

=> EC cũng là đường cao => EC$\perp$BD; theo trên CG$\perp$BD => E,C,G thẳng hàng. Vậy DF, EG, AB đồng quy

e. Theo trên DF $\perp$ BE => ΔDEF vuông tại F có FM là trung tuyến (vì M là trung điểm của DE)

Suy ra MF = $\frac{1}{2}$DE (vì trong tam giác vuông trung tuyến thuộc cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền).

f. (HD) theo trên MF = 1/2 DE => MD = MF => ΔMDF cân tại M => $\angle D_1 = \angle F_1$

ΔO'BF cân tại O' (vì O'B và O'F cùng là bán kính) => $\angle F_3 = \angle B_1$ mà $\angle B_1 = \angle D_1$ (Cùng phụ với $\angle DEB$) => $\angle F_1 = \angle F_3$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = \angle F_3 + \angle F_2$. Mà $\angle F_3 + \angle F_2 = \angle BFC = 90^0$ => $\angle F_1 + \angle F_2 = 90^0 = \angle MFO'$ hay MF $\perp$ O'F tại F

=> MF là tiếp tuyến của (O').