# CHUYÊN ĐỀ 6. HAI MẶT PHẲNG VUÔNG GÓC

## A. Lý thuyết

### 1. Định nghĩa

Hai mặt phẳng (P) và (Q) được gọi là vuông góc với nhau nếu góc giữa hai mặt phẳng đó là một góc vuông. Khi đó, ta kí hiệu (P) $\perp$ (Q) hoặc (Q) $\perp$ (P).

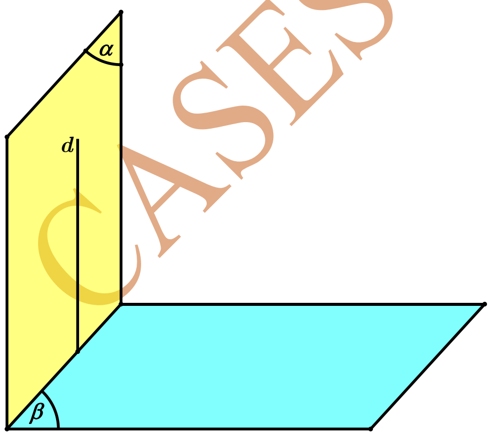
### 2. Tính chất

- **Điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng vuông góc với nhau:** là mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng kia.
- **Nếu hai mặt phẳng vuông góc với nhau** thì bất cứ đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng này và vuông góc với giao tuyến thì vuông góc với mặt phẳng kia.
- **Cho hai mặt thẳng (Q) và (P) vuông góc với nhau**. Nếu từ một điểm thuộc mặt phẳng (P) ta dựng một đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (Q) thì đường thẳng này nằm trong mặt phẳng (P).
- **Nếu hai mặt phẳng cắt nhau và cùng vuông góc với một mặt phẳng** thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng đó.

### 3. Các phương pháp chứng minh

***Phương pháp 1:***

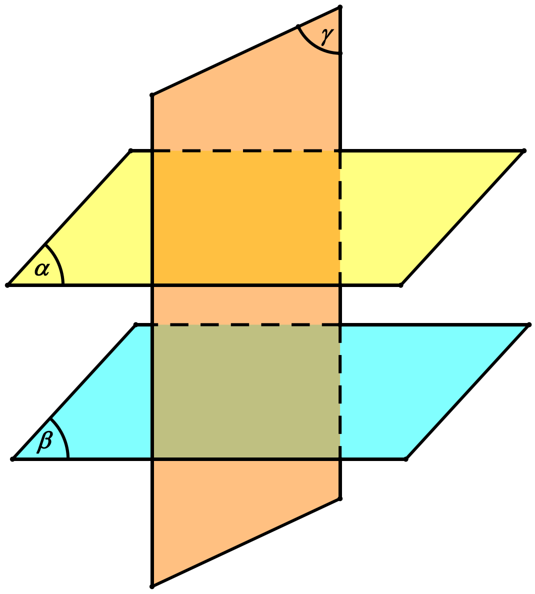
Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.




$$\left.\begin{array}{l} d \perp (\beta) \\ d \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

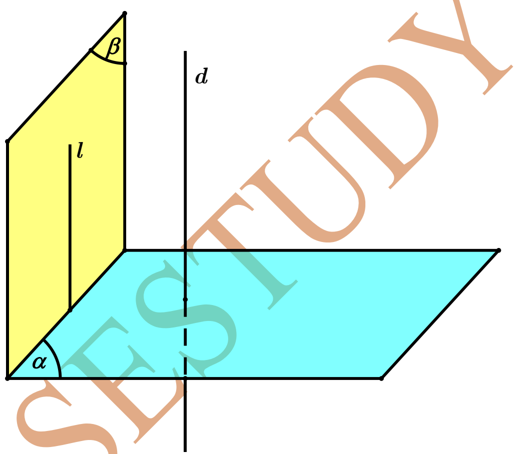
***Phương pháp 2:***

Sử dụng tính chất: $\left.\begin{array}{l} (\alpha) /\!/ (\beta) \\ (\gamma) \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (\gamma) \perp (\beta)$.




***Phương pháp 3:***

Sử dụng tính chất $(\alpha) \perp d$, mà $d \,//\, (\beta)$ hoặc $d \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.






**<u>B. Bài tập</u>**

**Bài 1.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B, Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Chứng minh rằng (SAB) ⊥ (SBC), (AHK) ⊥ (SBC).

**Bài 2.** Cho tứ diện ABCD có AB ⊥ (BCD). Trong tam giác BCD vẽ các đường cao BE và DF cắt nhau tại O. Trong mp(ACD) vẽ DK ⊥ AC. Gọi H là trực tâm của tam giác ACD.

a) Chứng minh (ACD) ⊥ (ABE) và (ACD) ⊥ (DFK).

b) Chứng minh OH ⊥ (ACD).

**Bài 3.** Cho hình chóp SABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Chứng minh rằng (SAB) ⊥ (SBC), (SAD) ⊥ (SCD), (SAC) ⊥ (SBD).

**Bài 4.** Cho hình chóp S.ABCD có các mặt bên (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với (ABCD). Biết ABCD là hình vuông và SA = AB. Gọi M là trung điểm của SC. Chứng minh rằng (SAC) ⊥ (SBD), (SAD) ⊥ (SCD), (SCD) ⊥ (ABM).

**Bài 5.** Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại C, SAC là tam giác đều và nằm trong mp vuông góc với (ABC). Gọi I là trung điểm của SC, Chứng minh (SBC) ⊥ (SAC), (ABI) ⊥ (SBC).

**Bài 6.** Cho tứ diện ABCD có AD ⊥ (DBC). Gọi AE, BF là các đường cao của tam giác ABC; H, K là trực tâm của các tam giác ABC và DBC. Chứng minh (ADE) ⊥ (ABC) và (BFK) ⊥ (ABC), HK ⊥ (ABC).

**Bài 7.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi tâm O. Hai mp(SAC) và (SBD) cùng vuông góc với đáy.

a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD).
b) Chứng minh BC ⊥ (SOA).
c) Chứng minh OK ⊥ BC và (SBC) ⊥ (SOK).
d) Kẻ OH ⊥ SK. Chứng minh OH ⊥ (SBC).

**Bài 8.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Gọi O, I, J là trung điểm của BC, AB và AC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại O ta lấy điểm S. Chứng minh rằng:

a) (SBC) ⊥ (ABC).
b) (SOI) ⊥ (SAB).
c) (SOI) ⊥ (SOJ).

**Bài 9.** Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = $a\sqrt{6}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

**Bài 10.** Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với đáy (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD, đường cao DK của ΔACD.

a) Chứng minh: AB ⊥ (BCD).
b) Chứng minh 2 mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC).
c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của 2 tam giác BCD và ADC. Chứng minh: OH ⊥ (ADC).

**Bài 11.** Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, SA ⊥ (ABCD).

a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD).
b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).
c) Gọi BE, DF là hai đường cao của ΔSBD. Chứng minh : (ACF) ⊥ (SBC), (AEF) ⊥ (SAC).

**Bài 12.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Gọi M, N là 2 điểm lần lượt ở trên hai cạnh BC, DC sao cho BM = $\frac{a}{2}$, DN = $\frac{3a}{4}$. Chứng minh 2 mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

**Bài 13.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB′ và CC′ cùng vuông góc với (ABC).

a) Chứng minh (ABB′) ⊥ (ACC′).

b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và ΔAB′C′. Chứng minh 2 mặt phẳng (BCC′B′) và (AB′C′) cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).

**Bài 14.** Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.

a) Chứng minh rằng SI ⊥ (ABCD), AD ⊥ (SAB).

b) Tính góc giữa BD và (SAD).

c) Tính góc giữa SD và (SCI).

**Bài 15.** Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với (ABC); S là 1 điểm di động trên (P) sao cho S.ABC là hình chóp có 2 mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC.

a) Chứng minh rằng: $SH^2$ = HI.HJ.

b) Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α.

**Bài 16.** Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để:

a) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (BCD).

b) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (ACD).

**Bài 17.** Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD); M và N là hai điểm nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y.

a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là MN ⊥ (SAM). Từ đó, suy ra hệ thức liên hệ giữa x và y.

b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có số đo bằng $30^0$ là $a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.

**Bài 18.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng $60^0$, cạnh SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC ⊥ (ABCD).

a) Chứng minh (SBD) ⊥ (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK $\perp$ SA tại K. Tính độ dài IK.Chứng minh $\widehat{BKD} = 90^0$ và từ đó suy ra (SAB) $\perp$ (SAD).

**Bài 19.** Cho hình chóp *S.ABC* có đáy là tam giác *ABC* vuông tại *B* và SA$\perp$(ABC).

a) Chứng minh (SBC)$\perp$(SAB)

b) Gọi *AH* và *AK* lần lượt là đường cao trong tam giác *SAB* và *SAC*.
Chứng minh (SBC)$\perp$(AKH).

c) Gọi D là giao điểm của *HK* và *BC*. Chứng minh (SAD)$\perp$(SAC.

**Bài 20.** Cho tứ diện *ABCD* có cạnh *AB* vuông góc với mặt phẳng *(BCD)*. Trong tam giác *BCD* vẽ các đường cao *BE* và *DF* cắt nhau tại *O*. Trong mặt phẳng *(ACD)*, vẽ *DK* vuông góc với *AC* tại *K*. Gọi *H* là trực tâm của tam giác *ACD*.

a) Chứng minh mặt phẳng *(ADC)* $\perp$ *(ABE)* và mặt phẳng *(ADC)* $\perp$ *(DFK)*

b) Chứng minh OH $\perp$ *(ACD)*

**Bài 21.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình chữ nhật, biết $AB = a$, AD = $a\sqrt{2}$; $SA = a$ và SA $\perp$ (ABCD). Gọi *M* là trung điểm của *AD*, *I* là giao điểm của *BM* và *AC*. Chứng minh rằng (SAC)$\perp$(SMB).

**Bài 22.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H là trung điểm của AB. Biết SA = SB = $a\sqrt{2}$;

a) Chứng minh rằng SH$\perp$(ABCD)

b) Chứng minh tam giác SBC vuông.

c) Chứng minh (SAD)$\perp$(SAB); (SAD)$\perp$(SBC).

**Bài 23.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông cạnh *a*. Mặt bên *SAD* là tam giác cân tại *S* và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi *M*, *N*, *P* lần lượt là trung điểm của *SB*, *BC* và *CD*.

a) Chứng minh (SAD)$\perp$(SAB)

b) Chứng minh AM$\perp$BP và (SBP)$\perp$(AMN)

**Bài 24.** Cho hình chóp *S.ABCD* có đáy *ABCD* là hình vuông, SA$\perp$(ABCD).

a) Chứng minh (SAC)$\perp$(SBD)

b) Chứng minh (SAD)$\perp$(SCD)

c) Gọi *BE* và *DF* là đường cao trong tam giác *SBD*. Chứng minh rằng (ACF)$\perp$(SBC).