

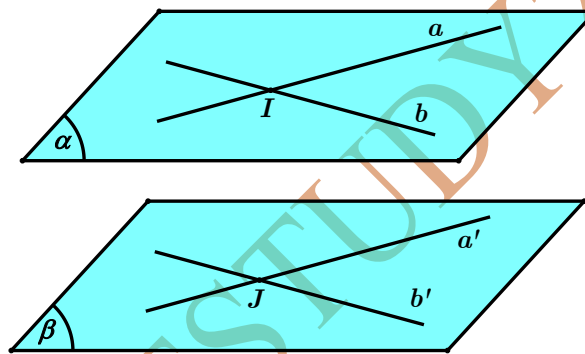
**CHUYÊN ĐỀ 4. MẶT PHẪNG SONG SONG MẶT PHẪNG****A. Lý thuyết*****Phương pháp 1:***

Cơ sở của phương pháp chứng minh hai mặt phẳng  $(\alpha)$  và  $(\beta)$  song song nhau là:

- *Bước 1: Chứng minh mặt phẳng  $(\alpha)$  chứa hai đường thẳng  $a, b$  cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng  $a', b'$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(\beta)$ .*
- *Bước 2: Kết luận  $(\alpha) \parallel (\beta)$  theo điều kiện cần và đủ.*

***Phương pháp 2:***

- *Bước 1: Tìm hai đường thẳng  $a, b$  cắt nhau trong mặt phẳng  $(\alpha)$ .*
- *Bước 2: Lần lượt chứng minh  $a \parallel (\beta)$  và  $b \parallel (\beta)$*
- *Bước 3: Kết luận  $(\alpha) \parallel (\beta)$ .*

**B. Bài tập**

**Bài 1.** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

- a) Chứng minh  $(OMN) \parallel (SBC)$ .
- b) Gọi P, Q là trung điểm của AB, ON. Chứng minh  $PQ \parallel (SBC)$ .

**Bài 2.** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao

cho luôn có:  $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$ .

- a) Chứng minh IJ luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.
- b) Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước.
- c) Tập hợp điểm M là đoạn EF với E, F là các điểm chia AB, CD theo tỉ số k.

**Bài 3.** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

- a) Chứng minh  $(OMN) \parallel (SBC)$ .

- b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song (SAB).
- c) Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh  $EF \parallel (SAD)$ .

**Bài 4.** Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho  $AM = BN$ . Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

- a) Chứng minh:  $(CBE) \parallel (ADF)$ .
- b) Chứng minh:  $(DEF) \parallel (MNN'M')$ .
- c) Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N di động.

*HD c) Trung tuyến tam giác ODE vẽ từ O.*

**Bài 5.** Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By. M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax, By sao cho  $AM = BN$ . Vẽ  $\overline{NP} = \overline{BA}$ .

- a) Chứng minh MP có phương không đổi và MN luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.
- b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh I nằm trên 1 đường thẳng cố định khi M, N di động.

**Bài 6.** Cho tứ diện ABCD có  $AB = AC = AD$ . Chứng minh các đường phân giác ngoài của các góc  $BAC, CAD, DAB$  đồng phẳng.

*HD: Cùng nằm trong mặt phẳng qua A và song song với (BCD).*

**Bài 7.** Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

- a) Chứng minh rằng :  $(OMN) \parallel (SBC)$
- b) Gọi P, Q, R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh :  $PQ \parallel (SBC)$ ,  $(MOR) \parallel (SCD)$

**Bài 8.** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I, J, K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh:

- a)  $(ADF) \parallel (BCE)$                       b)  $(DIK) \parallel (JBE)$

**Bài 9.** Cho các hình bình hành ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho  $MC = 2AM, NF = 2BN$ . Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại  $M_1, N_1$ . Chứng minh rằng :

- a)  $MN \parallel DE$
- b)  $M_1N_1 \parallel (DEF)$
- c)  $(MNM_1N_1) \parallel (DEF)$

**Bài 10.** Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trên AB lấy một điểm M với  $AM = x$ . Gọi  $(\alpha)$  là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC và CD lần lượt tại N, P, Q

- Tìm thiết diện của  $(\alpha)$  với mặt phẳng hình chóp. Thiết diện là hình gì?
- Tìm quỹ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.
- Cho  $SAD = 90^\circ$  và  $SA = a$ . Tính diện tích của thiết diện theo a và x. Tính x để diện tích đó bằng  $\frac{3a^2}{8}$

**Bài 11.** Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt. Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AB, BC và I, J, K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE. Chứng minh  $(IJK) \parallel (CDFE)$ .

**Bài 12.** Cho tứ diện ABCD. Gọi  $G_1, G_2, G_3$  lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB.

- Chứng minh:  $(G_1G_2G_3) \parallel (BCD)$
- Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng  $(G_1G_2G_3)$ . Tính diện tích thiết diện theo diện tích của tam giác BCD là S.

**Bài 13.** Cho hai tia chéo nhau Ax, By. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho  $AM = BN$ . Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

**Bài 14.** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một mặt phẳng qua IJ cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại N và M. Cho trước điểm M, hãy trình bày cách dựng điểm N. Xét trường hợp đặc biệt khi M là trung điểm của BC. Gọi K là giao của MN và IJ. Chứng minh rằng:  $KM = KN$ .

**Bài 15.** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

- Chứng minh  $(OMN) \parallel (SBC)$ .
- Gọi P, Q là trung điểm của AB, ON. Chứng minh  $PQ \parallel (SBC)$ .

**Bài 16.** Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có:  $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$ .

- Chứng minh rằng IJ luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.
- Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước.

*Hướng dẫn:*

- IJ song song với mp qua AB và song song CD.
- Tập hợp điểm M là đoạn EF với E, F là các điểm chia AB, CD theo tỉ số k.

**Bài 17.** Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

- Chứng minh rằng  $(OMN) // (SBC)$ .
- Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song (SAB).
- Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh  $EF // (SAD)$ .

**Bài 18.** Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho:  $AM = BN$ . Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M', N'.

- Chứng minh:  $(CBE) // (ADF)$ .
- Chứng minh:  $(DEF) // (MNN'M')$ .
- Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N di động.

**Bài 19.** Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By. M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax, By sao cho  $AM = BN$ . Vẽ  $\overline{NP} = \overline{BA}$ .

- Chứng minh MP có phương không đổi và MN luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.
- Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh I nằm trên một đường thẳng cố định khi M, N di động.

**Bài 20.** Cho tứ diện ABCD. Gọi G<sub>1</sub>, G<sub>2</sub>, G<sub>3</sub> lần lượt là trọng tâm các tam giác ABC, ACD, ADB.

- Chứng minh  $(G_1G_2G_3) // (BCD)$ .
- Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mp(G<sub>1</sub>G<sub>2</sub>G<sub>3</sub>). Tính diện tích thiết diện khi biết diện tích tam giác BCD là S.
- M là điểm di động bên trong tứ diện sao cho G<sub>1</sub>M luôn song song với mp(ACD). Tìm tập hợp những điểm M.

