CHƯƠNG 4.
BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

A. LÝ THUYẾT

1. Bất đẳng thức cơ bản

Hai biến số	Ba biến số
1. $a^2+b^2 \ge 2ab \quad (\forall a,b \in R)$	**1.** $a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc}$
2. $a+b \ge 2\sqrt{ab} \ (a \ge 0, b \ge 0)$	**2.** $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc$
3. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y} \ge \frac{4}{x+y} \quad x,y>0$	**3.** $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} \ge \frac{9}{x+y+z} \quad z,y,z>0$
4. $\frac{1}{xy} \ge \frac{4}{(x+y)^2}(x,y>0)$	**4.** $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$
5. $a^3+b^3 \ge a^2b+ab^2(a,b \ge 0$	**5.** $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$
6. a, b > 0 , $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \ge 2$	**6.** $abc \le \frac{a^3+b^3+c^3}{3}$
7. $\frac{a^3+b^3}{2} \ge \left(\frac{a+b}{2}\right)^3$	**7.** $abc \le \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3$
8. $ab \le \frac{a^2+b^2}{2} \quad (\forall a,b \in R)$	**8.** $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac} \le a+b+c$
9. $ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \quad (\forall a,b \in R)$	**9.** $3(ab+bc+ca) \le (a+b+c)^2$
10. $\frac{1}{x+y} \le \frac{1}{4}(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})$	**10.** $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$,a,b,c>0

2. Bất đẳng thức CAUCHY.(AM-GM)

Cho $a_1 \ge 0,\ a_2 \ge 0,\ \dots,\ a_n \ge 0 \Rightarrow \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1.a_2\dots a_n}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ (Điểm rơi của BĐT)

3. Bất đẳng thức BUNHIACOPXKI (3 dạng)

1. $(a_1x_1+a_2x_2+....+a_nx_n)^2 \le \left(a_2^{2}+a_2^2+....+a_n^2\right).\left(x_1^2+x_2^2+....+_n^2\right)$ dấu "=" xảy ra khi $\frac{a_1}{x_1}=\frac{a_2}{x_2}=......$

2. $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2} \ge \sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$

3.Cho dãy số dương $a_1, a_2, \dots a_n$ và $b_1, b_2, ..b_n$ tùy ý

a. $\frac{a_1^2}{b_1}+\frac{a_2^2}{b_2}+...+\frac{a_n^2}{b_n}\ge\frac{(a_1+a_2+...+a_n)^2}{b_1+b_2+...+b_n}$

b. $\frac{a_1}{x_1}+\frac{a_2}{x_2}+......+\frac{a_n}{x_n}\ge\frac{(a_1+a_2+....a_n)^2}{a_1x_1+a_2x_2+..+a_nx_n}$

B. TỰ LUẬN

DẠNG 1: SỬ DỤNG PHÉP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG BIẾN ĐỔI VỀ BẤT ĐẲNG THỨC CƠ BẢN

Bài 1. Chứng minh các bất đăng thức sau:

1. $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$
2. $a^2+b^2+c^2+3\ge 2(a+b+c)$
3. $a^4+b^4+c^2+1\ge 2a(ab^2-a+c+1)$
4. $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\ge a(b+c+d+e)$
5. $a^4+b^4\ge a^3b+ab^3$
6. $a^2+b^2+1\ge ab+a+b$
7. $a^2+b^2+c^2\ge 2(ab+bc-ca)$
8. $\frac{a^2}{4}+b^2+c^2\ge ab-ac+2bc$
9. $\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{1+b^2}\ge\frac{2}{1+ab}$; với $ab\ge 1$.
10. $\frac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$

Bài 2. Cho *a, b, c, d* $\in$ *R*. Chứng minh rằng $a^2+b^2\ge 2ab$ **(1). Áp dụng chứng minh:**

1. $a^4+b^4+c^4+d^4\ge 4abcd$
2. $(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4)\ge 256abcd$
3. $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1)\ge 8abc$

Bài 3. Cho *a, b, c* $\in$ *R*. Chứng minh: $a^2+b^2+c^2\ge ab+bc+ca$ **(1). Áp dụng chứng minh**

1. $(a+b+c)^2\le 3(a^2+b^2+c^2)$
2. $(a+b+c)^2\ge 3(ab+bc+ca)$
3. $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}}$ với *a,b,c>0*
4. $\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\ge\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2$
5. $a^4+b^4+c^4\ge abc(a+b+c)$
6. $a^4+b^4+c^4\ge abc$ nếu $a+b+c=1$

Bài 4. Cho *a, b* ≥ 0. Chứng minh : $a^3+b^3\ge a^2b+b^2a=ab(a+b)$ **(1). Áp dụng chứng minh**

1. $\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\le\frac{1}{abc}$; với *a, b, c* > 0.
2. $\frac{1}{a^3+b^3+1}+\frac{1}{b^3+c^3+1}+\frac{1}{c^3+a^3+1}\le 1$; với *a, b, c* > 0 và *abc* = 1.

3. $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1}\le 1$; với $a, b, c > 0$ và $abc = 1$.

4. $\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)}\ge 2(a+b+c)$ với $a, b, c \ge 0$.

5. $\sqrt[3]{\sin A}+\sqrt[3]{\sin B}+\sqrt[3]{\sin C}\le \sqrt[3]{\cos\frac{A}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{B}{2}}+\sqrt[3]{\cos\frac{C}{2}}$ (A,B,C là ba góc của một tam giác)

6. Cho x, y, z>0 thỏa mãn x + y + z = 1. Tìm GTNN: $P=\frac{x^2(y+z)}{yz}+\frac{y^2(z+x)}{zx}+\frac{z^2(x+y)}{xz}$ (ĐH07)

7. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3+b^3}{2ab}+\frac{b^3+c^3}{2bc}+\frac{c^3+a^3}{2ca}\ge a+b+c$

8. Cho $a, b, c > 0$. Chứng minh rằng: $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca$

9. Cho $a, b, c > 0$ $CMR: 3(a^3+b^3+c^3)\ge (a+b+c)(a^2+b^2+c^2)$

10. Cho $a, b, c > 0$ $CMR: 9(a^3+b^3+c^3)\ge (a+b+c)^3$

Bài 5. Cho *a, b, x, y* $\in R$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2}\ge\sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ **(1)Áp dụng chứng minh các bất đẳng thức sau:**

1. Cho $a, b \ge 0$ thoả $a+b=1$. Chứng minh: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2}\ge\sqrt{5}$.

2. Tìm GTNN của $P=\sqrt{a^2+\frac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\frac{1}{a^2}}$.

3. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x+y+z=1$. Chứng minh: $\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\frac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\frac{1}{z^2}}\ge\sqrt{82}$.

4. Cho $x, y, z > 0$ thoả mãn $x+y+z=\sqrt{3}$. TìmGTNN : $P=\sqrt{223+x^2}+\sqrt{223+y^2}+\sqrt{223+z^2}$.

Bài 6. Cho *a, b* > 0. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge\frac{4}{a+b}$ **(1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:**

1. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 2\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)$; với $a, b, c > 0$.

2. $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\ge 2\left(\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\right)$ với $a, b, c > 0$.

3. Cho $a, b, c > 0$ thoả $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=4$. Chứng minh: $\frac{1}{2a+b+c}+\frac{1}{a+2b+c}+\frac{1}{a+b+2c}\le 1$

4. $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le\frac{a+b+c}{2}$; với $a, b, c > 0$.

5. Cho $x, y, z > 0$ thoả $x+2y+4z=12$. Chứng minh: $\frac{2xy}{x+2y}+\frac{8yz}{2y+4z}+\frac{4xz}{4z+x}\le 6$.

6. Cho *a, b, c* là độ dài ba cạnh một tam giác, *p* là nửa chu vi. CM: $\frac{1}{p-a}+\frac{1}{p-b}+\frac{1}{p-c}\ge 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

7. Cho x, y, z >0 và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=2009$ Tìm GTLN: $\frac{1}{2x+y+z}+\frac{1}{x+2y+z}+\frac{1}{x+y+2z}$ ĐH07

Bài 7. Cho *a, b, c* > *0*. Chứng minh $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge\frac{9}{a+b+c}$ **(1). Áp dụng chứng minh các BĐT sau:**

1. $(a^2+b^2+c^2)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)\ge\frac{3}{2}(a+b+c)$ Với *a, b, c > 0*

2. Cho *x, y, z > 0* thoả $x+y+z=1$. Tìm GTLN của biểu thức: P = $\frac{x}{x+1}+\frac{y}{y+1}+\frac{z}{z+1}$.

3. Cho *a, b, c > 0* thoả $a+b+c\le 1$. Tìm GTNN của biểu thức:P = $\frac{1}{a^2+2bc}+\frac{1}{b^2+2ac}+\frac{1}{c^2+2ab}$.

4. Cho *a, b, c > 0* thoả $a+b+c=1$. Chứng minh: $\frac{1}{a^2+b^2+c^2}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\ge 30$

5. Cho tam giác ABC. Chứng minh: $\frac{1}{2+\cos 2A}+\frac{1}{2+\cos 2B}+\frac{1}{2-\cos 2C}\ge\frac{6}{5}$.

6. Cho x, y, z d□ơng và x+y+z = 1.Tìm min của $P=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{y+1}+\frac{1}{z+1}$

SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY (AM-GM)

<u>DẠNG 2.1:</u> SỬ DỤNG ĐÁNH GIÁ TỪ TRUNG BÌNH CỘNG SANG TRUNG BÌNH NHÂN

Bài 1. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc$ với *a, b, c* ≥ 0
2. $\left(a^2+b^2\right)\left(b^2+c^2\right)\left(c^2+a^2\right)\ge 8a^2b^2c^2\quad\forall a,b,c$
3. $3a^3+7b^3\ge 9ab^2\ \forall a, b\ge 0$
4. $\frac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}}\ge 2\ \forall a\in R$
5. $a+\frac{1}{b(a-b)}\ge 3\ \forall a>b>0$
6. $a+\frac{4}{(a-b)(b+1)^2}\ge 3\quad\forall\ a>b>0$
7. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9abc$ với *a, b, c* ≥ 0
8. $(1+a)(1+b)(1+c)\ge\left(1+\sqrt[3]{abc}\right)^3$ với *a, b, c* ≥ 0
9. $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge a+b+c$ với *a, b, c > 0*
10. $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc$ với *a, b, c* ≥ 0

11. $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\le\dfrac{a+b+c}{2}$; với *a, b, c > 0.*

12. $\left(\dfrac{1}{a}+1\right)\left(\dfrac{1}{b}+1\right)\left(\dfrac{1}{c}+1\right)\ge 2\left(1+\dfrac{a+b+c}{\sqrt[3]{abc}}\right)$với *a, b, c > 0.*

13. $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\ge\dfrac{3}{2}$; với *a, b, c > 0.*

14. $(a^3+b^3+c^3)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\ge(a+b+c)^2$

15. Cho a, b, c > 0; a + b + c = 6. Chứng minh rằng: $\left(1+\dfrac{1}{a^3}\right)\left(1+\dfrac{1}{b^3}\right)\left(a+\dfrac{1}{c^3}\right)\ge\dfrac{729}{512}$

Bài 2. Tìm GTNN của các biểu thức sau:

a) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x};\ x>0$

b) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1};\ x>1$

c) $y=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{x+1};\ x>-1$

d) $y=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{5}{x};\ 0<x<1$

e) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{2x-1};\ x>\dfrac{1}{2}$

f) $y=\dfrac{x^3+1}{x^2};\ x>0$

g) $y=\dfrac{x^2+4x+4}{x};\ x>0$

h) $y=x^2+\dfrac{2}{x^3};\ x>0$

<u>DẠNG 2.2:</u> ĐÁNH GIÁ TỪ TRUNG BÌNH NHÂN SANG TRUNG BÌNH CỘNG

Bài 1. Tìm GTLN của các biểu thức sau

a) $y=(x+3)(5-x);\ -3\le x\le 5$

b) $y=x(6-x);\ 0\le x\le 6$

c) $y=(x+3)(5-2x);\ -3\le x\le\dfrac{5}{2}$

d) $y=(2x+5)(5-x);\ -\dfrac{5}{2}\le x\le 5$

e) $y=(6x+3)(5-2x);\ -\dfrac{1}{2}\le x\le\dfrac{5}{2}$

f) $y=\dfrac{x}{x^2+2};\ x>0$

Bài 2. Cho ba số thực a, b, c không âm . Chứng minh : $a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}\le a^3+b^3+c^3$

Bài 3. Cho ba số thực a, b, c thoả $a\ge 9, b\ge 4, c\ge 1$. Chứng minh :

$$ab\sqrt{c-1}+bc\sqrt{a-9}+ca\sqrt{b-4}\le\frac{11abc}{12}$$

Bài 4. Cho x,y >0 thỏa mãn: x + y = 2. Chứng minh:

a) $xy(x^2+y^2)\le 2$

b) $x^3y^3(x^3+y^3)\le 2$

Bài 5. Cho: $a+b+c=1$. Chứng minh : $abc(a+b)(b+c)(c+a)\le\dfrac{8}{729}$

Bài 6. Với x,y là các số thực thỏa mãn: $0\le x\le 3; 0\le y\le 4$. Tìm GTLN:

$$A=(3-x)(4-y)(2x+3y)$$

DẠNG 3: SỬ DỤNG BUNHIACOPXKI (CAUCHY – SCHWARZ)

Bài 1. Cho x, y, z >0 và x+y+z≤ 2. Chứng minh: $\frac{x}{2x+1}+\frac{y}{2y+1}+\frac{z}{2z+1}\le\frac{6}{7}$

Bài 2. Cho a,b,>0 và $a^2+b^2+c^2\ge 1$. Chứng minh: $\frac{a^3}{b+c}+\frac{b^3}{a+c}+\frac{c^3}{b+a}\ge\frac{1}{2}$

Bài 3. Cho 3 số thực x,y,z có tổng bằng 1. Tìm GTNN của biểu thức: $S=x^4+y^4+z^4-xyz$.

Bài 4. Cho x,y,z>0 Tìm GTNN của biểu thức: $S=\frac{x^2}{x^2+2yz}+\frac{y^2}{y^2+2yx}+\frac{z^2}{z^2+2yx}$.

Bài 5. Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn hệ thức: $ab+bc+ca=abc$. Chứng minh:

$$\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{cb}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ac}\ge\sqrt{3}$$

Bài 6. Cho 3 số thực dương x,y,z có tích bằng 1. Chứng minh:

$$\frac{1}{x^3(y+z)}+\frac{1}{y^3(x+z)}+\frac{1}{z^3(y+x)}\ge\frac{3}{2}.$$

Bài 7. Cho x,y,z là các số thực dương. Tìm GTNN của $P=\frac{x^2y}{z^3}+\frac{y^2z}{x^3}+\frac{z^2x}{y^3}+\frac{13xyz}{3(xy^2+yz^2+zx^2)}$

Bài 8. Với giả thiết các số thực dương a,b,c. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

1. $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$
2. $\frac{a}{a+2bc}+\frac{b}{b+2ca}+\frac{c}{c+2ab}\ge 1$
3. $\frac{a^3}{a+2b}+\frac{b^3}{b+2c}+\frac{c^3}{c+2a}\ge\frac{a^2+b^2+c^2}{3}$
4. $\frac{a}{a^3+b^2+c}+\frac{b}{b^3+c^2+a}+\frac{c}{c^3+a^2+b}\le 1$ Với a+b+c =3
5.
6. $\frac{bc}{a^2+1}+\frac{ca}{b^2+1}+\frac{ab}{c^2+1}\le\frac{3}{4}$ với $a^2+b^2+c^2=1$
7. $\frac{a^2}{5a^2+(b+c)^2}+\frac{b^2}{5b^2+(a+c)^2}+\frac{c^2}{5c^2+(b+a)^2}\le\frac{1}{3}$
8. $\frac{a^2}{(2a+b)(2a+c)}+\frac{b^2}{(2b+c)(2b+a)}+\frac{c^2}{(2c+a)(2c+b)}\le\frac{1}{3}$