

BÀI TẬP NGUYÊN HÀM

A. Lý thuyết

	u là hàm số theo biến x, tức là $u = u(x)$	*Trường hợp đặc biệt $u = ax + b, a \neq 0$
*Nguyên hàm của các hàm số đơn giản		
$\int dx = x + C$	$\int du = u + C$	
$\int k \cdot dx = k \cdot x + C$, k là hằng số	$\int k \cdot du = k \cdot u + C$	
$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int u^\alpha du = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (ax+b)^\alpha \cdot dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$	$\int \frac{1}{u} du = \ln u + C$	$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$
$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + C$	$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u} + C$	
$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{u}} du = 2\sqrt{u} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} du = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$
*Nguyên hàm của hàm số mũ		
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int e^u du = e^u + C$	$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$
$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C$	$\int e^{-u} du = -e^{-u} + C$	
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, 0 < a \neq 1$	$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$\int a^{mx+n} dx = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C, m \neq 0$
*Nguyên hàm của hàm số lượng giác		
$\int \cos x \cdot dx = \sin x + C$	$\int \cos u \cdot du = \sin u + C$	$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$
$\int \sin x \cdot dx = -\cos x + C$	$\int \sin u \cdot du = -\cos u + C$	$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \tan u + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\cot x + C$	$\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\cot u + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot g(ax+b) + C$

Một số ví dụ trong trường hợp đặc biệt

*Trường hợp đặc biệt $u = ax + b$	Ví dụ
$\int \cos kx \cdot dx = \frac{1}{k} \sin kx + C$	$\int \cos 2x \cdot dx = \frac{1}{2} \sin 2x + C, (k = 2)$
$\int \sin kx \cdot dx = -\frac{1}{k} \cos kx + C$	$\int \sin 2x \cdot dx = -\frac{1}{2} \cos 2x + C$
$\int e^{kx} dx = \frac{1}{k} e^{kx} + C$	$\int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} + C$

$\int (ax+b)^\alpha .dx = \frac{1}{a} \cdot \frac{(ax+b)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\int (2x+1)^2 .dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{(2x+1)^{2+1}}{2+1} + C = \frac{1}{6} \cdot (2x+1)^3 + C$
$\int \frac{1}{(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \ln ax+b + C$	$\int \frac{1}{3x-1} dx = \frac{1}{3} \ln 3x-1 + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}} du = \frac{1}{a} \cdot 2\sqrt{ax+b} + C$	$\int \frac{1}{\sqrt{3x+5}} du = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3x+5} + C = \frac{2}{3} \sqrt{3x+5} + C$
$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$	$\int e^{2x+1} dx = \frac{1}{2} e^{2x+1} + C$
$\int a^{mx+n} du = \frac{1}{m} \cdot \frac{a^{mx+n}}{\ln a} + C, m \neq 0$	$\int 5^{2x+1} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{5^{2x+1}}{\ln 5} + C$
$\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\int \cos(2x+1) dx = \frac{1}{2} \sin(2x+1) + C$
$\int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\int \sin(3x-1) dx = -\frac{1}{3} \cos(3x-1) + C$
$\int \frac{1}{\cos^2(ax+b)} dx = \frac{1}{a} \tan(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\cos^2(2x+1)} dx = \frac{1}{2} \tan(2x+1) + C$
$\int \frac{1}{\sin^2(ax+b)} dx = -\frac{1}{a} \cot(ax+b) + C$	$\int \frac{1}{\sin^2(3x+1)} dx = -\frac{1}{3} \cot(3x+1) + C$
Chú ý: Những công thức trên có thể chứng minh bằng cách lấy đạo hàm về trái hoặc tính bằng phương pháp đổi biến số đặt $u = ax+b \Rightarrow du = .?.dx \Rightarrow dx = .?.du$ Ví dụ: Chứng minh $\int \cos(ax+b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C, a \neq 0$ Giải: Đặt $u = ax+b \Rightarrow du = (ax+b)' dx = a \cdot dx \Rightarrow dx = \frac{1}{a} \cdot du$ Suy ra $\int \cos(ax+b) dx = \int \cos u \cdot \frac{1}{a} \cdot du = \frac{1}{a} \int \cos u \cdot du = \frac{1}{a} \cdot \sin u + C = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	

Dạng 1. Tìm nguyên hàm bằng định nghĩa và các tính chất

A/ Tìm nguyên hàm của các hàm số.

Bài 1: Sử dụng bảng nguyên hàm và tính chất

a) $f(x) = 2x^9 - \frac{1}{2}$

b) $f(x) = \frac{2}{x} + 3$

c) $f(x) = 2 \sin x$

d) $f(x) = \frac{\cos x}{3}$

e) $f(x) = 3^x + x + 1$

Bài 2: Tìm nguyên hàm của các hàm số

a) $f(x) = x^2 - 3x + \frac{1}{x}$

b) $f(x) = \frac{2x^4 + 3}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{(x^2-1)^2}{x^2}$

e) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$

g) $f(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}$

h) $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$

i) $f(x) = x^5 + 3x^2 - 4$

j) $f(x) = -\frac{2}{3}x^6 + 3x^5 + 3x^2 - 2$

k) $f(x) = (2x + 3x^{-2})(x^2 - \frac{1}{x}) + 3x^{-3}$

Bài 3. Tìm nguyên hàm của các hàm số

a) $\int (x+2)(x^2-2x+4)dx$

b) $\int (\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x})dx$

c) $\int \sin^2 x dx$

d) $\int \sin 2x \cdot \cos x dx$

e) $\int 10^{2x} \cdot 3^x \cdot 5^x dx$

f) $\int \frac{(x^2-1)(x^2+3)}{\sqrt[3]{x^2}} dx$

g) $\int \frac{x^3 - 2x + 1}{x^5} dx$

h) $\int \sin(2x+1)dx$

i) $\int (1+2x^2)^{10} x dx$

j) $\int \frac{1+\ln x}{x} dx$

k) $\int x e^{x^2} dx$

l) $\int \frac{dx}{(1-2x)^4}$

Bài 3: Tìm nguyên hàm của các hàm số

a) $\int (x-2)(x+4)dx$

b) $\int (x^2-3)(x+1)dx$

c) $\int 3(x-3)^2 dx$

d) $\int \frac{x^2-5x}{x} dx$

e) $\int \frac{2x^3-5x^2-1}{x} dx$

f) $\int \frac{2x^3-5x^2-1}{x^2} dx$

g) $\int \frac{(x+2)^2}{x} dx$

h) $\int \frac{(x+4)^2}{x^2} dx$

Bài 4: Tìm nguyên hàm của các hàm số

a) $\int (x^4 + x^{\frac{-1}{2}} - 5)dx$

b) $\int (x^{-3} - 2x^{-2} + 4x + 1)dx$

c) $\int \sqrt{x}(\sqrt{x}-2x)(x+1)dx$

d) $\int (2x+1)(1-\frac{1}{x})dx$

Bài 5: Tìm nguyên hàm của các hàm số

a) $\int (2 \cdot 3^x + 4^x) dx$

b) $\int (2 \cdot a^x + 5^x) dx$

c) $\int (3e^x + 5 \sin x - \frac{1}{x}) dx$

d) $\int e^x (2 + \frac{e^{-x}}{\cos^2 x}) dx$

e) $\int 2^x \cdot 3^x dx$

f) $\int 2^x \cdot 3^{2x} \cdot 5^x dx$

g) $\int e^x (2 - e^{-x}) dx$

h) $\int \frac{e^x}{2^x} dx$

Bài 6: Tính nguyên hàm của các hàm số

a) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

b) $\int (2x + \sin^2 \frac{x}{2}) dx$

c) $\int \cos^2 \frac{x}{2} dx$

d) $\int (2x^2 + \cos^2 \frac{x}{2}) dx \int (1 + \tan^2 x) dx$

e) $\int (1 + \cot^2 x) dx$

f) $\int \tan^2 x dx$

g) $\int \cot^2 x dx$

h) $\int (\tan x - \cot x)^2 dx$

i) $\int (2 \tan x + \cot x)^2 dx$

j) $\int \frac{1}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

k) $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} dx$

Bài 7: Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

a) $f'(x) = 2x + 1; f(1) = 5$

b) $f'(x) = 2 - x^2; f(2) = \frac{7}{3}$

c) $f'(x) = x - \frac{1}{x^2} + 2; f(1) = 2$

d) $f'(x) = 4\sqrt{x} - x; f(4) = 0$

e) $f'(x) = 4x^3 - 3x^2 + 2; f(-1) = 3$

f) $f'(x) = \sqrt[3]{x} + x^3 + 1; f(1) = 2$

g) $f'(x) = (x+1)(x-1) + 1; f(0) = 1$

h) $f'(x) = 3(x+2)^2; f(0) = 8$

Bài 8: Tìm hàm số $f(x)$ biết rằng

a) $f'(x) = ax + \frac{b}{x^2}; f(-1) = 2, f(1) = 4$

b) $f'(x) = \frac{15\sqrt{x}}{14}; f(1) = 4, f(4) = 9$

