BÀI TẬP TÍCH PHÂN

Dạng 2: Ứng dụng của tích phân trong tính diện tích, thể tích

A. Tính diện tích miền phẳng

1. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a;x=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b |f(x)|dx$

2. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a;x=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b |f(x)-g(x)|dx$

3. Diện tích S của miền giới hạn: $\begin{cases} x=f(y) \\ x=g(y) \\ y=a;y=b \end{cases} \Rightarrow S=\int_a^b |f(y)-g(y)|dy$

Bài 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y=x^2-2x-3, y=0, x=0, x=4$

b) $y=x^3-4x, y=0, x=-2, x=4$

c) $y=(x+2)e^{2x}, y=0, x=0, x=3$

d) $y=\sin^2 x.\cos^3 x, y=0, x=0, x=\frac{\pi}{2}$

e) $y=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $y=0$, $x=e$, $x=1$

f) $y=x(x+1)(x-3), y=0$

Bài 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y=2\sqrt{1-x^2}, y=2(1-x)$

b) $y=x^3-12x$, $y=x^2$

c) $y=1-\sqrt{1-x^2}, y=x^2$

d) $y=|x|$, $y=2-x^2$

e) $y=\sqrt{4-\frac{x^2}{4}}, y=\frac{x^2}{4\sqrt{2}}$

f) $y=-\sqrt{4-x^2}$, $x^2+3y=0$

g) $y=4-4y^2, y=1-x^4$

Bài 3: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y=(x-1)^2, y=\frac{x^2-2x+1}{8}, y=\frac{8}{x-1}$

b) $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$

c) $y=x^2+\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}, y=|x|$

d) $y=8-3x-2x^2, y=2+9x-2x^2, y=x+10$

e) $y=-x^2+6x-5$, $y=-x^2+4x-3$, $y=3x-15$

f) $y=|x^2-4x|, y=|2x-7|+1, x=-1; x=2$

g) $y=|x^2-4x+3|, y=-x+3$

h) $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{27}$, $y=\frac{27}{x}$

i) $y=2x^2$, $y=x^2-4x-4$, $y=8$

CASESTUDY24H

j) $y^2 = 2x,\ 2x + 2y + 1 = 0,\ y = 0$

k) $y = |x|,\ y = 2 - x^2$

l) $y = |x^2 - 4x + 3|,\ y = x + 3$

Bài 4: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $(C): y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$, tiếp tuyến với (C) tại A(0; 1).

b) $(C): y = \dfrac{2x+1}{x-1}$, $y = 0$, tiếp tuyến với (C) tại A(-2; 1).

c) $(P): y = x^2 - 4x + 5$ và hai tiếp tuyến với (P) tại A(1;2) và B(4;5).

d) $(C): y = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 1}$, trục Ox và tiếp tuyến của (C) vẽ từ O.

Bài 5: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y^2 - 2y + x = 0,\ x + y = 0$

b) $y = 3 + x - x^2,\ y = 2x + 1.$

c) $y = 0,\ y = \sin x,\ x = \dfrac{\pi}{2}, x = \dfrac{3\pi}{2}.$

d) $y = |x^2 - 4x + 3|,\ x = 2,\ y = x + 3.$

e) $y = (e+1)x,\ y = (1 + e^x)x.$

f) $y = |x^2 - 4x + 3|,\ y = x + 3.$

Bài 6: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y = x^2 - 2x - 3, y = 0, x = 0, x = 4$

b) $y = x^3 - 4x, y = 0, x = -2, x = 4$

c) $y = x^2 - 4x - 6, x = -2, x = 4$, trục Ox.

d) $y = x^3,\ y = 0,\ x = -2,\ x = 1$

e) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^4}},\ y = 0,\ x = 0, x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

f) $y = x^4 - x^2 + 1,\ y = x^3 - 3x,\ x = 1, x = 3$

g) $y = 2x^2 - 2x,\ y = x^2 + 3x - 6,\ x = 0,\ x = 4$

h) $y = |x^2 - 4x|, y = |2x - 7| + 1, x = -1; x = 2$

i) $y = \dfrac{x^3 - 3x + 1}{x - 2},\ x = 1, x = -1$, trục Ox.

j) $y = \dfrac{4x}{x^2 + 1}, y = 0, x = -1, x = 1$

Bài 7: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau

a) $y = \sin^2 x.\cos^3 x,\ x = 0,\ x = \dfrac{\pi}{2}$, trục Ox.

b) $y = \sin x + \cos^2 x,\ x = 0,\ x = \pi$, trục hoành.

c) $y = x + \sin x;\ y = x;\ x = 0;\ x = 2\pi.$

d) $y = x + \sin^2 x;\ y = \pi; x = 0;\ x = \pi.$

CASESTUDY24H

e) $y=\sin^2 x+\sin x+1,\ y=0,\ x=0,\ x=\dfrac{\pi}{2}$ f) $y=\sin x-2\cos x,\ y=3,\ x=0,\ x=\pi$

g) $y=\sin\dfrac{x}{2}\cos x;\ y=0;\ x=0;\ x=\dfrac{\pi}{2}$ h) $y=\tan^3 x;\ y=0;\ x=-\dfrac{\pi}{4};\ x=\dfrac{\pi}{4}.$

Bài 8: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường sau:

a) $(C): y=x^3+3x^2+3x+1$, và tiếp tuyến với (C) tại A(0; 1).

b) $(C): y=\dfrac{2x+1}{x-1}$, $y=0$, và tiếp tuyến với (C) tại A(-2; 1).

c) $(P): y=x^2-4x+5$ và hai tiếp tuyến với (P) tại A(1;2) và B(4;5).

d) $(C): y=\dfrac{x^2+x-2}{x+1}$, trục Ox và tiếp tuyến của (C) vẽ từ O.

Bài 9: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

a) $(C): y=x^3-2x^2+4x-3,\ y=0$ và tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ x = 2.

b) $(C): y=x^3-3x+2,\ x=-1$ và tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ x = –2.

c) $(C): y=x^2-2x$ và tiếp tuyến với (C) tại điểm O(0 ; 0) và tại A(3; 3) trên (C).

d) $y=\dfrac{1}{4}x^3-3x$, và tiếp tuyến với (C) tại điểm M thuộc đồ thị có hoành độä x = $2\sqrt{3}$.

e) $(C): y=x+\dfrac{1}{2x^2}$, tiệm cận xiên của (C), x = 1 và x = 3.

f) $(C): y=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$, $y=0$, tiệm cận xiên của (C), x = –1 và x = 2

B. Tính thể tích vật thể

1. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x=a;x=b \end{cases} \text{ quanh Ox một vòng là : } V_{Ox}=\pi\int_a^b f^2(x).dx$$

2. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:

$$\begin{cases} y=f(x) \\ y=g(x) \\ x=a;x=b \end{cases} \text{ quanh Ox một vòng là : } V_{Ox}=\pi\int_a^b \left|f^2(x)-g^2(x)\right|.dx$$

3. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:

$$\begin{cases} x=f(y) \\ x=0 \\ y=a;y=b \end{cases} \text{ quanh Oy một vòng là : } V_{Oy}=\pi\int_a^b f^2(y).dy$$

4. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay miền giới hạn các đường sau:

CASESTUDY24H

$$\begin{cases} x = f(y) \\ x = g(y) \ \ quanh\ Oy\ một\ vòng\ là: V_{Oy} = \pi\int_a^b \left| f^2(y) - g^2(y) \right| .dy \\ y = a; y = b \end{cases}$$

Bài 1: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox:

a) $y = \cos 2x, y = 0, x = 0, x = \pi$

b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1, y = 0$, tiếp tuyến với (H) tại A(2;-1)

c) $y = \sqrt{\sin^6 x + \cos^6 x}, y = 0, x = 0, x = \frac{\pi}{2}$

d) $y = \frac{2x}{x^2+1}, x = 0, x = 1$

e) $y = x \ln x,\ y = 0,\ x = 1,\ x = e$

f) $x^2 + (y-2)^2 \le 1$

g) $y^2 = (4-x)^3, y^2 = 4x$

h) $y = -x^2 + 4x,\ y = x + 2$

i) $y = \frac{1}{x} - 1, y = 0, y = 2x$

j) $y = \left| 2x - x^2 \right|, y = 0, x = 3$

Bài 2: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Oy:

a) $y = \left| 2x - x^2 \right|, y = 0, x = 3$

b) $y = (2x+1)^{1/3}, y = 3, x = 0$

c) $y = \ln x, y = 0, x = e$

d) $x = y^2 + 3,\ x = 4y$

Bài 3: Tính thể tích vật thể tròn xoay sinh ra bởi hình (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox

a) $y = \frac{x-1}{x},\ y = \frac{1}{x}, x = 1$

b) $y = x^2,\ y = 4x^2,\ y = 4$

c) $y = \frac{1}{x^2+1},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

d) $y = \sqrt{x} - 1,\ y = 0, x = 4$

e) $y = cosx$,$y=0$, $x=0$,$x=\frac{\pi}{4}$

f) $y = \sqrt{\cos x}, (0 \le x \le \frac{\pi}{2})$

g) $y = x^{\frac{1}{2}}.e^{\frac{x}{2}}, y = 0, x = 1, x = 2$

h) $y^2 = x^3, y = 0, x = 1$

i) $y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1$

j) $y = 2\sqrt{2x - x^2},\ y = 4 - 2x$

k) $y = 2x^2, y = x^3$

l) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$

Bài 4: Tính thể tích hình khối sinh ra bởi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục

CASESTUDY24H

Ox:

a) $y=\sqrt{x},\ x=4$

b) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$

c) $y=-x^2+4x,\ y=x+2$

d) $y=\dfrac{x^2}{4},\ y=\dfrac{x^3}{8}$

e) $y=x^2-4x+6,\ y=-x^2-2x+6$

f) $y=4-x^2,\ y=x^2+2$

g) $y=-\dfrac{1}{4}x^4+2x^2+\dfrac{9}{4},\ y=0$

h) $y=x^2-2x,\ y=-x^2+4x$

i) $y=\dfrac{-x^2+x}{x+1},\ y=0$

j) $(x-2)^2+y^2=9,\ y=0$

Bài 5: Tính thể tích hình khối sinh ra bởi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox:

a) $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=3$

b) $y=xe^x,\ y=0,\ x=1$

c) $y=\dfrac{2x+1}{x+1},\ y=0,\ x=0$

d) $y=\left|2x-x^2\right|, y=0, x=3$

e) $y=\dfrac{1}{x}-1, y=0, y=2x$

f) $y=x^3,\ y=0,\ x=1$

g) $y=\ln x,\ y=0,\ x=2$

h) $y=e^x,\ y=2,\ x=1$

Bài 6: Tính thể tích hình khối sinh ra bởi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Oy:

a) $x=ye^y,\ x=0,\ y=1$

b) $y^2=4-x,\ x=0$

c) $x=\dfrac{2}{y}, y=1, y=4$

d) $y=x^2, y=4$

e) $y=e^x, x=0, y=e$

f) $y=x^2,\ y=1,\ y=2$

Bài 7: Tính thể tích hình khối sinh ra bởi hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường sau quay quanh trục Ox ; Oy:

a) $y=(x-2)^2,\ y=4$

b) $y=x^2,\ y=4x^2,\ y=4$

c) $y=\sqrt{x-1},\ y=2,\ y=0,\ x=0$

d) $y=2x-x^2,\ y=0$

e) $x^2+(y-2)^2\le 1$

f) $(x-4)^2+y^2\le 1$

g) $y=x^2,\ y=\sqrt{x}$

h) $y=x^2(x>0),\ y=-3x+10,\ y=1$

i) $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}\le 1$

j) $x-y^2=0,\ y=2,\ x=0$

CASESTUDY24H