

CHUYÊN ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT & BẬC HAI

Dạng 1. Miền xác định, tập giá trị của hàm số

A. Lý thuyết

1. Khái niệm hàm số

• Nếu đại lượng y phụ thuộc vào đại lượng thay đổi x sao cho với mỗi giá trị của x , ta luôn xác định được một và chỉ một giá trị tương ứng của y thì y đgl **hàm số** của x , x đgl **biến số**. Ta viết: $y = f(x), y = g(x), \dots$

• Giá trị của $f(x)$ tại x_0 kí hiệu là $f(x_0)$.

• Tập xác định D của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp các giá trị của x sao cho $f(x)$ có nghĩa.

• Khi x thay đổi mà y luôn nhận một giá trị không đổi thì hàm số y đgl **hàm hằng**.

2. Đồ thị của hàm số

Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; y)$ trong mặt phẳng toạ độ Oxy sao cho x, y thoả mãn hệ thức $y = f(x)$.

3. Hàm số đồng biến, nghịch biến

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập R .

a) $y = f(x)$ **đồng biến** trên $R \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$

b) $y = f(x)$ **nghịch biến** trên $R \Leftrightarrow (\forall x_1, x_2 \in R : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$

4. Tìm tập xác định D của hàm số $y=f(x)$ là tìm các giá trị của biến số x để $f(x)$ xác định.

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ có nghĩa}\}.$$

➤ **Điều kiện xác định của một số hàm số thường gặp:**

1. Hàm số $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ Điều kiện xác định: $Q(x) \neq 0$

2. Hàm số $y = \sqrt{R(x)}$ Điều kiện xác định $R(x) \geq 0$

3. Hàm số $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ Điều kiện xác định $Q(x) > 0$.

➤ **Chú ý:** $P(x), Q(x) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) \neq 0 \\ Q(x) \neq 0 \end{cases}$

➤ Tính giá trị của hàm số $y=f(x)$ tại $x=a$.

Nếu $a \notin D$ thì không tồn tại $f(a)$.

Nếu $a \in D$ thì tồn tại duy nhất $f(a)$.

➤ Điều kiện để hàm số f xác định trên tập A là $A \subset D$

B. Bài tập

Bài 1. Cho hai hàm số $f(x) = x^2$ và $g(x) = 3 - x$.

a) Tính $f(-3), f\left(-\frac{1}{2}\right), f(0), g(1), g(2), g(3)$.

b) Xác định a để $2f(a) = g(a)$.

Bài 2. Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(4 - 2\sqrt{3})$ và $f(a^2)$ với $a < -1$.

c) Tìm x nguyên để $f(x)$ là số nguyên.

d) Tìm x sao cho $f(x) = f(x^2)$.

Bài 3. Cho hàm số $f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{|x+1| - |x-1|}$.

a) Tìm tập xác định D của hàm số.

b) Chứng minh rằng $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$.

Bài 4. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = x^3 - 2x^2 + x - 1$

b) $y = \frac{x-1}{(x+1)(x-3)}$

c) $y = \frac{1}{x^2 - 2x + 3}$

d) $y = \frac{3\sqrt{x-1}}{|x|-2}$

e) $y = \sqrt{x-5} - \sqrt{x+3}$

f) $y = \sqrt{x+2} + \sqrt{2-x}$

Bài 5. Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \frac{x+3}{2x-4}$

b) $y = \frac{2x+5}{4-3x}$

c) $y = \frac{2x+1}{x^2-3x+2}$

d) $y = \frac{x-1}{x^2-x+1}$

e) $y = \frac{x-1}{x^3+1}$

f) $y = \frac{x-2}{(1-x)(x^2-4x+3)}$

g) $y = \frac{1}{x^4-2x^2+3}$

Bài 6. Tìm tập xác định của hàm số:

a) $y = \sqrt{2-5x}$

b) $y = \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}$

c) $y = \frac{x+5}{(x+1)\sqrt{x-1}}$

d) $y = \sqrt{|2x-4|}$

e) $y = \sqrt{4-x} + \sqrt{x+1}$

f) $y = \sqrt{x-1} + \frac{1}{x-3}$

g) $y = \sqrt{x+3} - 2\sqrt{x+2}$

h) $y = \frac{\sqrt{5-2x}}{(x-2)\sqrt{x-1}}$

k) $y = \sqrt{2x-4} + \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

l) $y = \sqrt{x+3} + \frac{x}{x^2-3x+2}$

m) $y = \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{4-x}}{(x-2)(x-3)}$

n) $y = \sqrt[3]{x^2-4} + \sqrt{x^2-4x+4}$ o) $y = \sqrt{\sqrt{x^2+2x+2} - (x+1)}$

p) $y = \frac{1}{\sqrt{x-2}\sqrt{x-1}}$

q) $y = \frac{x+3}{\sqrt{|x-1|+|3-2x|+x-2}}$

r) $y = \frac{4x^2-1}{\sqrt{4-x|x|}}$

Bài 7. Tìm tham số a để hàm số:

a) $y = \frac{2x+1}{x^2-6x+a-2}$ xác định trên $D=\mathbb{R}$

b) $y = \frac{3x+1}{x^2-2ax+4}$ xác định trên $D=\mathbb{R}$

c) $y = \sqrt{x-a} + \sqrt{2x-a-1}$ xác định trên $D=(0;+\infty)$

d) $y = \sqrt{2x-3a+4} + \frac{x-a}{x+a-1}$ xác định trên $D=(0;+\infty)$

e) $y = \frac{x+2a}{x-a+1}$ xác định trên $D=(-1;0)$

f) $y = \frac{1}{\sqrt{x-a}} + \sqrt{-x+2a+6}$ xác định trên $D=(-1;0)$

g) $y = \sqrt{2x+a+1} + \frac{1}{x-a}$ xác định trên $D=(1;+\infty)$

h) $y = \frac{1}{\sqrt{x+3a-2} + \sqrt{a+2-x}}$ xác định trên $D=[-1;1]$

i) $y = \sqrt{2x+2a-1} + \sqrt{x+2a-5}$ xác định trên $D=(1;+\infty)$

Bài 8. Cho hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x-1} & \text{khi } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{khi } 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 1 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$.

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính $f(-1), f(0), f(1), f(2), f(3)$

Bài 9. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ nghịch biến trong khoảng $(-\infty; 2)$ và đồng biến trong khoảng $(2; +\infty)$.

Bài 10. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = x^3$ luôn luôn đồng biến.

Bài 11. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ nghịch biến trong từng khoảng xác định của nó.

Bài 12. Chứng tỏ rằng hàm số $y = f(x) = \sqrt{3-x} + 2\sqrt{2-x}$ nghịch biến trong khoảng xác định của nó.

Bài 13. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = -x^3 + x^2 - x + 6$ trên

đoạn $[0; 2]$.

Bài 14. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = \frac{x-2}{x+1}$ trong đoạn $[-3; -2]$.

Bài 15. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = -\frac{2}{3}x$; $y = -\frac{2}{3}x + 1$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

Có nhận xét gì về hai đồ thị này.

Bài 16. Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{x}$.

- Chứng minh rằng hàm số đồng biến.
- Trong các điểm $A(4; 2)$, $B(2; 1)$, $C(9; 3)$, $D(8; 2\sqrt{2})$, điểm nào thuộc và điểm nào không thuộc đồ thị của hàm số.

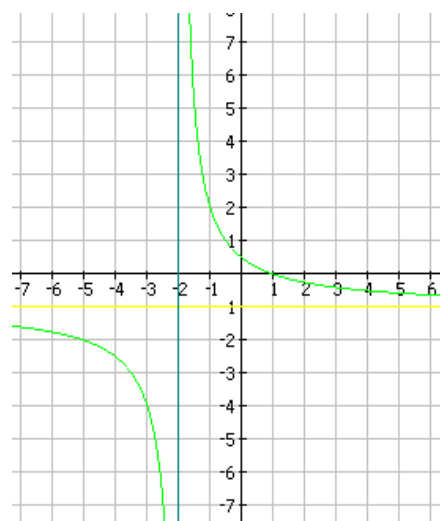
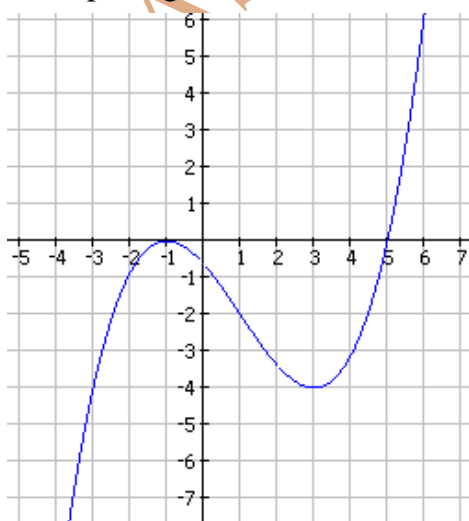
Bài 17. Khảo sát sự biến thiên và lập bảng biến thiên của hàm số:

- $y = x^2 + 2x - 2$ trên $(-\infty; -1)$, $(-1; +\infty)$
- $y = -2x^2 + 4x + 1$ trên $(-\infty; 1)$, $(1; +\infty)$
- $y = \frac{5}{x+3}$ trên $(-\infty; -3)$, $(-3; +\infty)$
- $y = \frac{-1}{x-4}$ trên $(-\infty; 4)$, $(4; +\infty)$
- $y = x^{2011} + 2012$ trên $(-\infty; +\infty)$
- $y = \frac{1}{x}$
- $y = \frac{1}{x^2}$
- $y = \sqrt{x}$
- $y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$

Bài 18. Chứng minh hàm số:

- $y = \frac{3x-2}{x-1}$ giảm trên $(1; +\infty)$
- $y = x\sqrt{x^2}$ tăng trên \mathbb{R}

Bài 19. Lập bảng biến thiên của hàm số cho bởi đồ thị:



Bài 20. Với giá trị nào của m thì hàm số:

a) $y = f(x) = (m-1)x + m^2 - 3$ đồng biến trên \mathbb{R} .

b) $y = f(x) = -x^2 + (m-1)x + 2$ nghịch biến trên $(1;2)$.

Bài 21. Cho hàm số $y = ax + b|x-1| + c|x-2|$ luôn luôn tăng. Chứng minh $a > 0$.

Bài 22. Cho hàm số $f(x)$ tăng trên \mathbb{R} , $g(x)$ giảm trên \mathbb{R} . Chứng minh hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$ tăng trên \mathbb{R} .

Bài 23. Chứng minh nếu phương trình $f(x) = g(x)$ có nghiệm x_0 thì đó là nghiệm duy nhất.

Bài 24. Tìm tập xác định và tập giá trị của hàm số: $y = f(x) = x^2 + \sqrt{x-3}$.

Dạng 2. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số

A. Lý thuyết

Để xét tính chẵn, lẻ của hàm số ta tiến hành các bước như sau:

- Tìm tập xác định D .
- Kiểm tra $x \in D \Rightarrow -x \in D$ (tức đối xứng qua O).
- Tính $f(-x)$:
 - Nếu $f(-x) = f(x)$ thì f là hàm số chẵn.
 - Nếu $f(-x) = -f(x)$ thì f là hàm số lẻ.

➤Chú ý:

- Hàm số $y = f(x) = 0$ là hàm số vừa chẵn, vừa lẻ trên D tập đối xứng qua O .
- Để chứng minh hàm số không chẵn, ta chứng minh hoặc miền xác định D không đối xứng qua O , hoặc có $x_0 \in D$ sao cho $f(-x_0) \neq f(x_0)$.
- Để chứng minh hàm số không lẻ ta chứng minh hoặc miền xác định D không đối xứng qua O , hoặc có $x_0 \in D$ sao cho $f(-x_0) \neq -f(x_0)$.

B. Bài tập

Bài 1. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = x^4 - 4x^2 + 2$

b) $y = -2x^3 + 3x$

c) $y = x^4 + 8x$

d) $y = |2x+5| + |2x-5|$

e) $y = x + |x|$

f) $y = \frac{2x|x|}{\sqrt{x^2-1}}$

g) $y = \sqrt{x-1}$

h) $y = \sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x-2}$

i) $y = \sqrt[5]{2x-3} - \sqrt[5]{2x+3}$

j) $y = (x-1)^2$

n) $y = \frac{-x^4 + x^2 + 1}{2x}$

m) $y = \frac{x^2 + 2}{\sqrt[3]{x^3 - x}}$

Bài 2. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

$$a) y = f(x) = \begin{cases} 1 & \text{khi } x > 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \\ -1 & \text{khi } x < 0 \end{cases} \quad b) y = f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1 & \text{khi } x \leq -3 \\ |x| & \text{khi } -3 < x < 3 \\ x^3 + 1 & \text{khi } x \geq 3 \end{cases}$$

Bài 3. Tìm điều kiện của tham số để:

- Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ là hàm số lẻ.
- Hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ là hàm số chẵn.

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x)$ và $y = g(x)$ xác định trên \mathbb{R} . Đặt $S(x) = f(x) + g(x)$ và $P(x) = f(x).g(x)$. Chứng minh rằng:

- Nếu $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là những hàm số lẻ thì $y = S(x)$ là hàm số lẻ và $y = P(x)$ là hàm số chẵn.
- Nếu $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là những hàm số chẵn thì $y = S(x)$ và $y = P(x)$ là những hàm số chẵn.
- Nếu $y = f(x)$ là hàm số chẵn và $y = g(x)$ là hàm số lẻ thì $y = P(x)$ là hàm số lẻ.

Bài 5. Xác định hàm số $y = f(x)$ có miền xác định là \mathbb{R} và vừa chẵn vừa lẻ.

Bài 6. Cho hàm số $y = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng, ta có thể biểu diễn $f(x) = g(x) + h(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ trong đó hàm số $y = g(x)$, $x \in \mathbb{R}$ là hàm số chẵn; còn hàm số $y = h(x)$, $x \in \mathbb{R}$ là hàm số lẻ.

Bài 7. Xét tính chẵn lẻ và tìm trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có) của đồ thị hàm số:

$$a) y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x} \quad b) y = \sqrt{2+x} - \sqrt{2-x} \quad c) y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$d) y = \frac{1}{\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{x+3}} \quad e) y = x - \frac{1}{x} \quad f) y = \frac{|x+2| + |x-2|}{||x+2| - |x-2||}$$

Dạng 3. Biến đổi đồ thị hàm số

A. Lý thuyết

Cho các số dương p, q và hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (G) .

- Tịnh tiến (G) lên trên q đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x) + q$.
- Tịnh tiến (G) xuống dưới q đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x) - q$.
- Tịnh tiến (G) sang trái p đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x+p)$.
- Tịnh tiến (G) sang phải p đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x-p)$.

⚡Chú ý:

Tịnh tiến (G) **lên trên** (hoặc xuống dưới) q đơn vị rồi tịnh tiến **sang trái** (hoặc sang phải) p đơn vị ta được đồ thị hàm số $y = f(x \pm p) \pm q$

B. Bài tập

Bài 1. Cho đồ thị (H) của hàm số $y = \frac{x}{x-1}$ sẽ được đồ thị hàm số nào khi:

- a) Tịnh tiến lên trên 2 đơn vị;
- b) Tịnh tiến sang trái 3 đơn vị;
- c) Tịnh tiến lên trên 2 đơn vị, sau đó tịnh tiến sang trái 3 đơn vị.

Bài 2. Cho parabol (P): $y = x^2 + 1$. Ta được đồ thị hàm số nào khi tịnh tiến:

- a) Lên trên 3 đơn vị rồi sang phải 2 đơn vị.
- b) Xuống dưới 2 đơn vị rồi sang trái 4 đơn vị.

Bài 3. Tìm phép tịnh tiến biến đồ thị (d): $y = f(x) = 5x - 3$ thành (d'): $y = 5x + 2$ bằng 2 cách.

Bài 4. Tìm phép tịnh tiến biến đồ thị:

- a) (P): $y = x^2$ thành (P'): $y = x^2 - 6x + 10$
- b) (H): $y = \frac{2x+1}{x-3}$ thành (H'): $y = \frac{2x+5}{x-1}$.

Bài 5. Cho đồ thị (C): $y = -x^2 + x + 3$. Ta được đồ thị hàm số nào khi lấy đối xứng qua:

- a) Trục hoành
- b) Trục tung
- c) Góc tọa độ O.

Bài 6. Chứng minh:

- a) Đồ thị của hàm số $y = x - 2$ và đồ thị của hàm số $y = 2 - x$ là 2 đường thẳng đối xứng nhau qua trục hoành.
- b) Đồ thị của hàm số $y = 3x + 1$ và đồ thị của hàm số $y = -3x + 1$ là 2 đường thẳng đối xứng nhau qua trục tung.

Bài 7. Chứng minh rằng các đồ thị của hàm số $y = 5x$ và hàm số $y = \frac{1}{5}x$ đối xứng với nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất.