

CASESTUDY 24H - GÓC CHIA SẺ KIẾN THỨC

-----o0o-----

NGUYỄN HỮU TUYẾN

MÔN HỌC: TOÁN 8

**TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN
CƠ BẢN & NÂNG CAO**

HÀ NỘI - 2018

MỤC LỤC

	Trang
LỜI NÓI ĐẦU.....	
PHẦN SỐ HỌC	1
CHUYÊN ĐỀ 1. NHÂN, CHIA ĐA THỨC	1
I. Lý thuyết	1
II. Bài tập vận dụng	1
Dạng 1: Bài toán nhân đa thức	1
Dạng 2: Các hằng đẳng thức đáng nhớ.....	2
A. Lý thuyết.....	2
B. Bài tập	2
Dạng 2: Bài toán chia đa thức.....	5
CHUYÊN ĐỀ 2. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ	7
Dạng 1. Tìm điều kiện để phân thức có nghĩa	7
Dạng 2. Tìm điều kiện để phân thức bằng 0.....	8
Dạng 3. Chứng minh một phân thức luôn có nghĩa	8
Dạng 4. Phân thức bằng nhau.....	8
Dạng 5. Rút gọn phân thức	9
Dạng 6. Qui đồng mẫu thức của nhiều phân thức	10
Dạng 7. Thực hiện các phép toán trên phân thức	11
Bài tập tổng hợp chuyên đề phân thức	14
CHUYÊN ĐỀ 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN	17
Dạng 1. Giải phương trình bậc nhất	17
Dạng 2. Tìm tham số thỏa mãn điều kiện	19
CHUYÊN ĐỀ 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH	20
Dạng 1. Toán tìm hai số biết tổng hoặc hiệu hoặc tỉ số	20
Dạng 2. Bài toán chuyển động	20
Dạng 3. Bài toán tìm tuổi, tìm số sách, tính số lượng ghế, số công nhân	21
PHẦN HÌNH HỌC	23
CHUYÊN ĐỀ 1. TỨ GIÁC	23
Dạng 1: Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc	23
Dạng 2: Sử dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác	23
CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH THANG & HÌNH THANG VUÔNG	24
I. Lý thuyết.....	24
II. Bài tập.....	24
Dạng 1: Tính chất các góc của một hình thang.....	24
Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông.....	25

CHUYÊN ĐỀ 3. HÌNH THANG CÂN	25
I. Lý thuyết	25
II. Bài tập	25
Dạng 1. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh	25
Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân	26
CHUYÊN ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, HÌNH THANG	27
I. Lý thuyết	27
II. Bài tập	27
CHUYÊN ĐỀ 5. HÌNH BÌNH HÀNH	29
I. Lý thuyết	29
II. Bài tập	29
Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh	29
Dạng 2. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành	29
CHUYÊN ĐỀ 6. ĐỐI XỨNG TRỤC	31
CHUYÊN ĐỀ 7. HÌNH CHỮ NHẬT	33
I. Lý thuyết	33
II. Bài tập	33
Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác	33
Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán	34
CHUYÊN ĐỀ 8. HÌNH THOI	35
I. Lý thuyết	35
II. Bài tập	36
Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi	36
Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán	36
CHUYÊN ĐỀ 9. HÌNH VUÔNG	37
I. Lý thuyết	37
II. Bài tập	37
Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông	37
Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán	38
Bài tập tổng hợp	39
CHUYÊN ĐỀ 10. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG - ĐỊNH LÝ TA LÉT	42
I. Lý thuyết	42
II. Bài tập	43
Gợi ý đáp án	48

LỜI NÓI ĐẦU

Thân gửi các em học sinh,

Cuốn sách là tổng hợp các bài tập cơ bản và nâng cao theo từng chương lý thuyết được học. Với mong muốn, các em có điều kiện luyện tập nhiều hơn nên Thầy tổng hợp lại các dạng bài đặc trưng này. Hy vọng các em sẽ tích cực học tập để đạt được kết quả tốt nhất.



CASESTUDY24H.COM

It's never too late to study! - Góc chia sẻ kiến thức

MINH TUYẾN - Tel: 034 9607 266 - Skype: nguyenhuu.tuyen1 - Email: casestudy24h@gmail.com



*Không bao giờ là quá muộn cho việc học tập.
Cùng nhau chia sẻ kiến thức và nâng tầm hiểu biết cùng Casestudy24h.*

CASESTUDY24H.COM

PHẦN SỐ HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1. NHÂN, CHIA ĐA THỨC

I. Lý thuyết

1. Phép nhân đa thức $(A + B)(C + D) = A.(C + D) + B.(C + D)$
2. Các phương pháp thực hiện phân tích:
 - Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện hiệu hai bình phương
 - Thêm, bớt cùng một số hạng tử để xuất hiện nhân tử chung
 - Phương pháp đặt ẩn phụ
 - Phương pháp sử dụng hệ số bất định

II. Bài tập

Dạng 1: Bài toán nhân đa thức

Bài 1: Thực hiện phép nhân

- | | |
|---|--|
| a. $(-2x)(x^3 - 3x^2 - x + 1)$ | f. $(x^3 + 5x^2 - 2x + 1)(x - 7)$ |
| b. $(-10x^3 + \frac{2}{5}y - \frac{1}{3}z)(-\frac{1}{2}xy)$ | g. $(2x^2 - 3xy + y^2)(x + y)$ |
| c. $3x^2(2x^3 - x + 5)$ | h. $(x - 2)(x^2 - 5x + 1) - x(x^2 + 11)$ |
| d. $(4xy + 3y - 5x)x^2y$ | |
| e. $(3x^2y - 6xy + 9x)(-\frac{4}{3}xy)$ | |
| i. $-\frac{1}{3}xz(-9xy + 15yz) + 3x^2(2yz^2 - yz)$ | |
| j. $[(x^2 - 2xy + 2y^2)(x + 2y) - (x^2 + 4y^2)(x - y)] 2xy$ | |

Bài 2: Tính giá trị của biểu thức

$$A = x(x - y) + y(x + y) \text{ tại } x = -\frac{1}{2} \text{ và } y = 3$$

$$B = 5x(4x^2 - 2x + 1) - 2x(10x^2 - 5x - 2) \text{ với } x = 15$$

$$C = 5x(x - 4y) - 4y(y - 5x) \text{ với } x = \frac{-1}{5}; y = \frac{-1}{2}$$

$$D = 6xy(xy - y^2) - 8x^2(x - y^2) \text{ với } x = \frac{1}{2}; y = 2.$$

$$E = (y^2 + 2)(y - 4) - (2y^2 + 1)(\frac{1}{2}y - 2) \text{ với } y = \frac{-2}{3}$$

Bài 3: Cho các đa thức $f(x) = 3x^2 - x + 1$ và $g(x) = x - 1$

- a. Tính $f(x).g(x)$
- b. Tìm x để $f(x).g(x) + x^2[1 - 3.g(x)] = \frac{5}{2}$

Bài 4: Tìm x, biết

- a. $(2x + 3)(x - 4) + (x - 5)(x - 2) = (3x - 5)(x - 4)$
- b. $(8x - 3)(3x + 2) - (4x + 7)(x + 4) = (2x + 1)(5x - 1)$
- c. $2x^2 + 3(x - 1)(x + 1) = 5x(x + 1)$
- d. $4(x - 1)(x + 5) - (x + 2)(x + 5) = 3(x - 1)(x + 2)$

Bài 5: Chứng minh rằng giá trị các biểu thức sau không phụ thuộc vào biến x

- a. $x(2x + 1) - x^2(x + 2) + (x^3 - x + 3)$
- b. $x(3x^2 - x + 5) - (2x^3 + 3x - 16) - x(x^2 - x + 2)$

Dạng 2: Các hằng đẳng thức đáng nhớ

A. Lý thuyết

a) Bình phương một tổng

Bình phương của một tổng bằng bình phương số thứ nhất cộng với hai lần tích số thứ nhất nhân số thứ hai rồi cộng với bình phương số thứ hai.

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

b) Bình phương một hiệu

Bình phương của một hiệu bằng bình phương số thứ nhất trừ đi hai lần tích số thứ nhất nhân số thứ hai rồi cộng với bình phương số thứ hai.

$$(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$$

c) Hiệu hai bình phương

Hiệu hai bình phương bằng hiệu hai số đó nhân tổng hai số đó.

$$A^2 - B^2 = (A + B)(A - B)$$

d) Lập phương một tổng

Lập phương của một tổng = lập phương số thứ nhất + 3 lần tích bình phương số thứ nhất nhân số thứ hai + 3 lần tích số thứ nhất nhân bình phương số thứ hai + lập phương số thứ hai.

$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$$

e) Lập phương một hiệu

Lập phương của một hiệu = lập phương số thứ nhất - 3 lần tích bình phương số thứ nhất nhân số thứ hai + 3 lần tích số thứ nhất nhân bình phương số thứ hai - lập phương số thứ hai.

$$(A - B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$$

f) Tổng hai lập phương

Tổng của hai lập phương bằng tổng hai số đó nhân với bình phương thiếu của hiệu.

$$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

g) Hiệu hai lập phương

Hiệu của hai lập phương bằng hiệu của hai số đó nhân với bình phương thiếu của tổng.

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)$$

B. Bài tập

Bài 1: Tính

a) $(x + 2y)^2$

b) $(2x + 3y)^2$

c) $(3x - 2y)^2$

d) $(5x - y)^2$

e) $\left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

f) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^2$

g) $\left(\frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y\right)^2$

h) $(3x + 1)(3x - 1)$

i) $\left(x^2 + \frac{2}{5}y\right)\left(x^2 - \frac{2}{5}y\right)$

j) $\left(\frac{x}{2} - y\right)\left(\frac{x}{2} + y\right)$

j) $\left(\frac{x}{2} - 2y\right)^2$

k) $(\sqrt{2}x - y)^2$

l) $\left(\frac{3}{2}x + 3y\right)^2$

m) $(\sqrt{2}x + \sqrt{8}y)^2$

n) $\left(x + \frac{1}{6}y + 3\right)^2$

o) $\left(\frac{1}{2}x - 4y\right)^2$

p) $\left(\frac{x}{2} + 2y^2\right)\left(\frac{x}{2} - 2y^2\right)$

q) $(x^2 - 4)(x^2 + 4)$

r) $(x + y)^2 + (x - y)^2$

s) $(2x + 3)^2 - (x + 1)^2$

Bài 2: Tính

a) $\left(x + \frac{1}{3}\right)^3$

b) $(2x + y^2)^3$

c) $\left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}y\right)^3$

d) $(3x^2 - 2y)^3$

h) $(x + 1)(x^2 - x + 1)$

i) $(x - 3)(x^2 + 3x + 9)$

j) $(x - 2)(x^2 + 2x + 4)$

k) $(x + 4)(x^2 - 4x + 16)$

e) $\left(\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{2}y\right)^3$

f) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^3$

g) $(x - 3)^3$

l) $(x - 3y)(x^2 + 3xy + 9y^2)$

m) $\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{9}\right)$

n) $\left(\frac{1}{3}x + 2y\right)\left(\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{3}xy + 4y^2\right)$

Bài 3: Viết các đa thức sau thành tích

a) $x^2 - 6x + 9$

b) $25 + 10x + x^2$

c) $\frac{1}{4}a^2 + 2ab^2 + 4b^4$

d) $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}y^4 + y^8$

e) $x^3 + 8y^3$

f) $8y^3 - 125$

g) $a^6 - b^3$

h) $x^2 - 10x + 25$

i) $8x^3 - \frac{1}{8}$

j) $x^2 + 4xy + 4y^2$

k) $(3x + 2)^2 - 4$

l) $4x^2 - 25y^2$

m) $4x^2 - 49$

n) $8z^3 + 27$

o) $\frac{9}{25}x^4 - \frac{1}{4}$

p) $x^{32} - 1$

q) $4x^2 + 4x + 1$

r) $x^2 - 20x + 100$

s) $y^4 - 14y^2 + 49$

t) $125x^3 - 64y^3$

Bài 4: Tính nhanh

a) 1001^2

b) $29,9 \cdot 30,1$

c) 201^2

d) $37,43$

e) 199^2

f) $37^2 + 2 \cdot 37 \cdot 13 + 13^2$

g) $51,7 - 2 \cdot 51,7 \cdot 31,7 + 31,7^2$

h) $20,1 \cdot 19,9$

i) $31,8^2 - 2 \cdot 31,8 \cdot 21,8 + 21,8^2$

j) $33,3^2 - 2 \cdot 33,3 \cdot 3,3 + 3,3^2$

Bài 5: Rút gọn rồi tính giá trị biểu thức

a) $(x - 10)^2 - x(x + 80)$ với $x = 0,98$

b) $(2x + 9)^2 - x(4x + 31)$ với $x = -16,2$

c) $4x^2 - 28x + 49$ với $x = 4$

d) $x^3 - 9x^2 + 27x - 27$ với $x = 5$

e) $9x^2 + 42x + 49$ với $x = 1$

f) $25x^2 - 2xy + \frac{1}{25}y^2$ với $x = -\frac{1}{5}, y = -5$

g) $27 + (x - 3)(x^2 + 3x + 9)$ với $x = -3$

h) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ với $x = 99$

Bài 6: Viết mỗi biểu thức sau dưới dạng tổng hoặc hiệu hai bình phương

- | | |
|---------------------------------|---------------------------------|
| a) $x^2 + 10x + 26 + y^2 + 2y$ | f) $4x^2 + 2z^2 - 4zx - 2z + 1$ |
| b) $z^2 - 6z + 13 + t^2 + 4t$ | g) $(x + y + 4)(x + y - 4)$ |
| c) $x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + 1$ | h) $(x - y + 6)(x + y - 6)$ |
| d) $4x^2 + 2z^2 - 4xz - 2z + 1$ | i) $(y + 2z - 3)(y - 2z - 3)$ |
| e) $4x^2 - 12x - y^2 + 2y + 8$ | j) $(x + 2y + 3z)(2y + 3z - x)$ |

Bài 7: Tìm x biết

- | | |
|---|--------------------------------------|
| a) $25x^2 - 9 = 0$ | d) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) = 1$ |
| b) $(x - 3)^2 - 4 = 0$ | e) $(x + 4)^2 - (x + 1)(x - 1) = 16$ |
| c) $x^2 - 2x = 24$ | f) $(x - 2)^3 - x^2(x - 6) = 4$ |
| g) $(6x - 2)^2 + (5x - 2)^2 - 4(3x - 1)(5x - 2) = 0$ | |
| h) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$ | |
| i) $(x - 1)(x^2 + x + 1) - x(x + 2)(x - 2) = 5$ | |
| j) $(2x - 1)^2 + (x + 3)^2 - 5(x + 7)(x - 7) = 0$ | |

Bài 8: Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

- $x^2 + 5x + 7$
- $x^2 - 20x + 101$
- $4a^2 + 4a + 2$
- $x^2 - 4xy + 5y^2 + 10x - 22y + 28$
- $x^2 + 3x + 7$

Bài 9: Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

- $6x - x^2 - 5$
- $4x - x^2 + 3$
- $x - x^2$
- $11 - 10x - x^2$
- $|x - 4|(2 - |x - 4|)$

Bài 10: Cho $x + y = 5$. Tính giá trị của các biểu thức

- $P = 3x^2 - 2x + 3y^2 - 2y + 6xy - 100$
- $Q = x^3 + y^3 - 2x^2 - 2y^2 + 3xy(x + y) - 4xy + 3(x + y) + 10$

Bài 11:

- Cho $x + y = 3$ và $x^2 + y^2 = 5$. Tính $x^3 + y^3$.

b) Cho $x - y = 5$ và $x^2 + y^2 = 15$. Tính $x^3 - y^3$.

Bài 12: Cho $x - y = 7$. Tính giá trị của các biểu thức:

$$M = x^3 - 3xy(x - y) - y^3 - x^2 + 2xy - y^2$$

$$N = x^2(x + 1) - y^2(y - 1) + xy - 3xy(x - y + 1) - 95$$

Dạng 3: Bài toán chia đa thức

Bài 1: Thực hiện các phép chia sau đây

- $(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x + 2)$
- $(2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50) : (x^2 - 3x + 2)$
- $(x^3 - 2x^2 + 5x + 8) : (x + 1)$
- $(3x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 4x - 8) : (x^2 - 2)$
- $(2x^3 - 2bx - 24) : (x^2 + 4x + 3)$

Bài 2: Tìm a, b để

- $(x^4 + ax^3 + bx - 1)$ chia hết cho $(x^2 - 1)$
- $(6x^4 - 7x^3 + ax^2 + 3x + 2)$ chia hết cho $(x^2 - x + b)$
- $(x^3 + 8x^2 + 5x + a)$ chia hết cho $(x^2 + 3x + b)$
- $(x^4 + ax^2 + b)$ chia hết cho $(x^2 - 3x + 2)$ và hãy tìm đa thức thương
- $(x^4 - 3x^3 - 3x^2 + ax + b)$ chia hết cho $(x^2 - 3x + 4)$
- $(x^4 + x^3 - x^2 + ax + b)$ chia hết cho $(x^2 + x - 2)$
- $(ax^4 + bx^3 + 1)$ chia hết cho $(x - 1)^2$
- $(x^3 + ax^2 + 2x + b)$ chia hết cho $(x^2 + x + 1)$
- $(x^4 - x^3 - 3x^2 + ax + b)$ chia cho $x^2 - x - 2$ thì có dư là $2x - 3$
- $(x^{10} + ax^3 + b)$ chia cho $x^2 - 1$ thì dư $2x + 1$

Bài 3: Tìm a, b, c để

- $(x^4 + ax^3 + bx + c)$ chia hết cho $(x - 3)^3$
- $(x^5 + x^4 - 9x^3 + ax^2 + bx + c)$ chia hết cho $(x - 2)(x + 2)(x + 3)$
- $(2x^4 + ax^2 + bx + c)$ chia hết cho $x - 2$ và khi chia cho $x^2 - 1$ thì dư x

Bài 4: Tìm dư trong phép chia $x + x^3 + x^9 + x^{27} + x^{81} + x^{243}$ cho $x^2 - 1$

Bài 5: Chứng minh rằng $(x^2 + x - 1)^{10} + (x^2 - x + 1)^{10}$ chia hết cho $x - 1$

Bài 6: Cho đa thức $f(x)$. Hãy tìm dư trong phép chia $f(x)$ cho $x^2 - 2x - 3$, biết rằng $f(x)$ chia cho $x + 1$ thì dư -45 và chia cho $x - 3$ thì dư -165

Bài 7: Tìm đa thức $f(x)$ biết:

- $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7, chia cho $x - 2$ thì dư 5, chia cho $(x - 2)(x - 3)$ thì có thương là $3x$ và còn dư
- $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 2, chia cho $x + 4$ thì dư 9, Chia cho $x^2 + x - 12$ thì được thương là $x^2 + 3$ và còn dư

- c. $f(x)$ có bậc 3 và thỏa mãn : $f(-1) = 0$ và chia cho $x - 1$, $x + 2$, $x + 3$ đều dư 8
 d. $f(x)$ có bậc 3 và thỏa mãn : $f(-1) = -18$ và chia cho $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ đều dư 6
 e. $f(x)$ có bậc 3 và thỏa mãn : $f(0) = 10$; $f(1) = 12$; $f(2) = 4$; $f(3) = 1$
 f. $f(x)$ có bậc 2 và thỏa mãn : $f(0) = 19$; $f(1) = 5$; $f(2) = 1995$
 g. $f(x)$ có bậc 4 và thỏa mãn : $f(0) = -1$; $f(1) = 2$; $f(2) = 31$; $f(3) = 47$

Bài 8: Không thực hiện phép chia hãy tìm dư trong các phép chia sau:

- a. $(x^5 + x + 1)$ chia cho $(x^3 - x)$
 b. $(x^{100} + x^{99} + x^{98} + x^{97} + \dots + x^2 + x + 1)$ chia cho $x^2 - 1$
 c. $x^2 + x^9 + x^{1996}$ chia cho $x^2 - 1$

Bài 9: Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $x^3 - 7x + 6$ j) $64x^4 + y^4$
 b) $x^3 - 9x^2 + 6x + 16$ k) $a^6 + a^4 + a^2b^2 + b^4 - b^6$
 c) $x^3 - 6x^2 - x + 30$ l) $x^3 + 3xy + y^3 - 1$
 d) $2x^3 - x^2 + 5x + 3$ m) $4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 1$
 e) $27x^3 - 27x^2 + 18x - 4$ n) $x^8 + x + 1$
 f) $x^2 + 2xy + y^2 - x - y - 12$ o) $x^8 + 3x^4 + 4$
 g) $(x + 2)(x + 3)(x + 4)(x + 5) - 24$ p) $3x^2 + 22xy + 11x + 37y + 7y^2 + 10$
 h) $4x^4 - 32x^2 + 1$ q) $x^4 - 8x + 63$
 i) $3(x^4 + x^2 + 1) - (x^2 + x + 1)^2$

CHUYÊN ĐỀ 2. PHÂN THỨC ĐẠI SỐ

Dạng 1. Tìm điều kiện để phân thức có nghĩa

Bài 1. Tìm điều kiện xác định của phân thức:

- a) $\frac{x^2 - 4}{9x^2 - 16}$ b) $\frac{2x - 1}{x^2 - 4x + 4}$ c) $\frac{x^2 - 4}{x^2 - 1}$
 d) $\frac{5x - 3}{2x^2 - x}$ e) $\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 1}$ f) $\frac{2}{(x + 1)(x - 3)}$

Bài 2. Tìm điều kiện xác định của phân thức:

- a) $\frac{1}{x^2 + y^2}$ b) $\frac{x^2y + 2x}{x^2 - 2x + 1}$ c) $\frac{5x + y}{x^2 + 6x + 10}$
 d) $\frac{x + y}{(x + 3)^2 + (y - 2)^2}$

Dạng 2. Tìm điều kiện để phân thức bằng 0

Bài 1. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng 0

a) $\frac{2x-1}{5x-10}$

b) $\frac{x^2-x}{2x}$

c) $\frac{2x+3}{4x-5}$

d) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$

e) $\frac{(x-1)(x+2)}{x^2-4x+3}$

f) $\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

Bài 2. Tìm các giá trị của biến số x để phân thức sau bằng 0

a) $\frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$

b) $\frac{x^3-16x}{x^3-3x^2-4x}$

c) $\frac{x^3+x^2-x-1}{x^3+2x-3}$

Dạng 3. Chứng minh một phân thức luôn có nghĩa

Bài 1. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa

a) $\frac{3}{x^2+1}$

b) $\frac{3x-5}{(x-1)^2+2}$

c) $\frac{5x+1}{x^2+2x+4}$

d) $\frac{x^2-4}{-x^2+4x-5}$

e) $\frac{x+5}{x^2+x+7}$

Bài 2. Chứng minh các phân thức sau luôn có nghĩa

a) $\frac{x+y}{x^2+2y^2+1}$

b) $\frac{4}{x^2+y^2-2x+2}$

Dạng 4. Phân thức bằng nhau

Bài 1. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{3y}{4} = \frac{6xy}{8x} \ (x \neq 0)$

b) $\frac{-3x^2}{2y} = \frac{3x^2}{-2y} \ (y \neq 0)$

c) $\frac{2(x-y)}{3(y-x)} = \frac{-2}{3} \ (x \neq y)$

d) $\frac{2xy}{3a} = \frac{8xy^2}{12ay} \ (a \neq 0, y \neq 0)$

e) $\frac{1-x}{2-y} = \frac{x-1}{y-2} \ (y \neq 2)$

f) $\frac{2a}{-5b} = \frac{-2a}{5b} \ (b \neq 0)$

Bài 2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $\frac{x-2}{-x} = \frac{2^3-x^3}{x(x^2+2x+4)} \ (x \neq 0)$

b) $\frac{3x}{x+y} = \frac{-3x(x-y)}{y^2-x^2} \ (x \neq \pm y)$

c) $\frac{x+y}{3a} = \frac{3a(x+y)^2}{9a^2(x+y)} \ (a \neq 0, x \neq -y)$

Bài 3. Với những giá trị nào của x thì hai phân thức sau bằng nhau:

$$\frac{x-2}{x^2-5x+6} \text{ và } \frac{1}{x-3}$$

Bài 4. Cho hai phân thức A và B. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

- i) $x \in N$ ii) $x \in Z$ iii) $x \in Q$

$$A = \frac{(2x+1)(x-2)}{3(2x+1)}, B = \frac{x-2}{3}$$

Bài 5. Cho ba phân thức A, B và C. Hãy xét sự bằng nhau của chúng trong các trường hợp sau:

- i) $x \in N$ ii) $x \in Z$ iii) $x \in Q$

$$A = \frac{x+1}{5}, B = \frac{(x+1)(x+2)}{5(x+2)}, C = \frac{(x+1)(3x-2)}{5(3x-2)}$$

Dạng 5. Rút gọn phân thức

Bài 1. Rút gọn các phân thức sau:

- a) $\frac{5x}{10}$ b) $\frac{4xy}{2y} (y \neq 0)$ c) $\frac{21x^2y^3}{6xy} (xy \neq 0)$
 d) $\frac{2x+2y}{4}$ e) $\frac{5x-5y}{3x-3y} (x \neq y)$ f) $\frac{-15x(x-y)}{3(y-x)} (x \neq y)$

Bài 2. Rút gọn các phân thức sau:

- a) $\frac{x^2-16}{4x-x^2} (x \neq 0, x \neq 4)$ b) $\frac{x^2+4x+3}{2x+6} (x \neq -3)$
 c) $\frac{15x(x+y)^3}{5y(x+y)^2} (y+(x+y) \neq 0)$ d) $\frac{5(x-y)-3(y-x)}{10(x-y)} (x \neq y)$
 e) $\frac{2x+2y+5x+5y}{2x+2y-5x-5y} (x \neq -y)$ f) $\frac{x^2-xy}{3xy-3y^2} (x \neq y, y \neq 0)$
 g) $\frac{2ax^2-4ax+2a}{5b-5bx^2} (b \neq 0, x \neq \pm 1)$ h) $\frac{4x^2-4xy}{5x^3-5x^2y} (x \neq 0, x \neq y)$
 i) $\frac{(x+y)^2-z^2}{x+y+z} (x+y+z \neq 0)$ k) $\frac{x^6+2x^3y^3+y^6}{x^7-xy^6} (x \neq 0, x \neq \pm y)$

Bài 3. Rút gọn, rồi tính giá trị các phân thức sau:

- a) $A = \frac{(2x^2+2x)(x-2)^2}{(x^3-4x)(x+1)}$ với $x = \frac{1}{2}$ b) $B = \frac{x^3-x^2y+xy^2}{x^3+y^3}$ với $x = -5, y = 10$

Bài 4. Rút gọn các phân thức sau:

- a) $\frac{(a+b)^2-c^2}{a+b+c}$ b) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$ c) $\frac{2x^3-7x^2-12x+45}{3x^3-19x^2+33x-9}$

Bài 5. Rút gọn các phân thức sau:

a) $\frac{a^3 + b^3 + c^3 - 3abc}{a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca}$

b) $\frac{x^3 - y^3 + z^3 + 3xyz}{(x+y)^2 + (y+z)^2 + (z-x)^2}$

c) $\frac{x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz}{(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2}$

d) $\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)}$

e) $\frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{ab^2 - ac^2 - b^3 + bc^2}$

f) $\frac{x^{24} + x^{20} + x^{16} + \dots + x^4 + 1}{x^{26} + x^{24} + x^{22} + \dots + x^2 + 1}$

Bài 6. Tìm giá trị của biến x để:

a) $P = \frac{1}{x^2 + 2x + 6}$ đạt giá trị lớn nhất

ĐS: $\max P = \frac{1}{5}$ khi $x = -1$

b) $Q = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 2x + 1}$ đạt giá trị nhỏ nhất

ĐS: $\min Q = \frac{3}{4}$ khi $x = 1$

Bài 7. Chứng minh rằng phân thức sau đây không phụ thuộc vào x và y :

a) $\frac{(x^2 + a)(1 + a) + a^2x^2 + 1}{(x^2 - a)(1 - a) + a^2x^2 + 1}$

b) $\frac{3xy - 3x + 2y - 2}{y - 1} - \frac{9x^2 - 1}{3x - 1} \left(x \neq \frac{1}{3}, y \neq 1 \right)$

c) $\frac{ax^2 - a}{x + 1} - \frac{axy + ax - ay - a}{y + 1} \quad (x \neq -1, y \neq -1)$

d) $\frac{(x + a)^2 - x^2}{2x + a}$

e) $\frac{x^2 - y^2}{(x + y)(ay - ax)}$

f) $\frac{2ax - 2x - 3y + 3ay}{4ax + 6x + 9y + 6ay}$

Dạng 6. Qui đồng mẫu thức của nhiều phân thức

Bài 1. Tìm điều kiện để các phân thức sau có nghĩa và tìm mẫu thức chung của chúng:

a) $\frac{x}{16}, \frac{xy}{20}$

b) $\frac{1}{4x}, \frac{3}{6y}$

c) $\frac{xy}{8}, \frac{y}{15}$

d) $\frac{x}{2y}, \frac{y}{2x}$

e) $\frac{xy}{8}, \frac{yz}{12}, \frac{xz}{24}$

f) $\frac{xy}{2z}, \frac{yz}{3x}, \frac{zx}{4y}$

Bài 2. Tìm điều kiện để các phân thức sau có nghĩa và tìm mẫu thức chung của chúng:

a) $\frac{5}{2x-4}, \frac{4}{3x-9}, \frac{7}{50-25x}$

b) $\frac{x}{4+2a}, \frac{y}{4-2a}, \frac{z}{4-a^2}$

c) $\frac{2a}{b^2}, \frac{x}{2a+2b}, \frac{y}{a^2-b^2}$

d) $\frac{3}{2x+6}, \frac{x-2}{x^2+6x+9}$

e) $\frac{1}{x^2-2x+1}, \frac{2}{x^2+2x}$

f) $\frac{x^4+1}{x^2-1}, x^2+1$

Bài 3. Qui đồng mẫu thức các phân thức sau:

a) $\frac{x}{2x^2+7x-15}, \frac{x+2}{x^2+3x-10}, \frac{1}{x+5}$

b) $\frac{1}{-x^2+3x-2}, \frac{1}{x^2+5x-6}, \frac{1}{-x^2+4x-3}$
 c) $\frac{3}{x^3-1}, \frac{2x}{x^2+x+1}, \frac{x}{x-1}$
 d) $\frac{x}{x^2-2xy+y^2-z^2}, \frac{y}{x^2+2yz-y^2-z^2}, \frac{z}{x^2-2xz-y^2+z^2}$

Dạng 7. Thực hiện các phép toán trên phân thức

Bài 1. Thực hiện phép tính

a) $\frac{x-5}{5} + \frac{1-x}{5}$ b) $\frac{x-y}{8} + \frac{2y}{8}$ c) $\frac{x^2-x}{xy} + \frac{1-4x}{xy}$
 d) $\frac{5xy^2-x^2y}{3xy} + \frac{4xy^2+x^2y}{3xy}$ e) $\frac{x+1}{a-b} + \frac{x-1}{a-b} + \frac{x+3}{a-b}$ f) $\frac{5xy-4y}{2x^2y^3} + \frac{3xy+4y}{2x^2y^3}$
 g) $\frac{2x^2-xy}{x-y} + \frac{xy+y^2}{y-x} + \frac{2y^2-x^2}{x-y}$

Bài 2. Thực hiện phép tính

a) $\frac{2x+4}{10} + \frac{2-x}{15}$ b) $\frac{3x}{10} + \frac{2x-1}{15} + \frac{2-x}{20}$ c) $\frac{x+1}{2x-2} + \frac{x^2+3}{2-2x^2}$
 d) $\frac{1-2x}{2x} + \frac{2x}{2x-1} + \frac{1}{2x-4x^2}$ e) $\frac{x}{xy-y^2} + \frac{2x-y}{xy-x^2}$
 f) $\frac{x^2}{x^2-4x} + \frac{6}{6-3x} + \frac{1}{x+2}$ g) $\frac{2x^2-10xy}{2xy} + \frac{5y-x}{y} + \frac{x+2y}{x}$
 h) $\frac{2}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{-3x}{x^2-y^2}$ i) $x+y + \frac{x^2+y^2}{x+y}$

Bài 3. Thực hiện phép tính

a) $\frac{2x}{x^2+2xy} + \frac{y}{xy-2y^2} + \frac{4}{x^2-4y^2}$ b) $\frac{1}{x-y} + \frac{3xy}{y^3-x^3} + \frac{x-y}{x^2+xy+y^2}$
 c) $\frac{2x+y}{2x^2-xy} + \frac{16x}{y^2-4x^2} + \frac{2x-y}{2x^2+xy}$
 d) $\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}}$

Bài 4. Thực hiện phép tính

a) $\frac{1-3x}{2} - \frac{x+3}{2}$ b) $\frac{2(x+y)(x-y)}{x} - \frac{-2y^2}{x}$ c) $\frac{3x+1}{x+y} - \frac{2x-3}{x+y}$

d) $\frac{xy}{2x-y} - \frac{x^2-1}{y-2x}$

e) $\frac{4x-1}{3x^2y} - \frac{7x-1}{3x^2y}$

Bài 5. Thực hiện phép tính

a) $\frac{4x+1}{2} - \frac{3x+2}{3}$

b) $\frac{x+3}{x} - \frac{x}{x-3} + \frac{9}{x^2-3x}$ c) $\frac{x+3}{x^2-1} - \frac{1}{x^2+x}$

d) $\frac{1}{3x-2} - \frac{4}{3x+2} - \frac{-10x+8}{9x^2-4}$

e) $\frac{3}{2x^2+2x} + \frac{2x-1}{x^2-1} - \frac{2}{x}$

f) $\frac{3x}{5x+5y} - \frac{x}{10x-10y}$

g) $\frac{4a^2-3a+5}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{6}{a-1}$

h) $\frac{5x^2-y^2}{xy} - \frac{3x-2y}{y}$

i) $\frac{x+9y}{x^2-9y^2} - \frac{3y}{x^2+3xy}$

k) $\frac{3x+2}{x^2-2x+1} - \frac{6}{x^2-1} - \frac{3x-2}{x^2+2x+1}$

l) $\frac{3}{2x+6} - \frac{x-6}{2x^2+6x}$

m) $x^2+1 - \frac{x^4+1}{x^2+1}$

n) $\frac{5}{a+1} - \frac{10}{a-(a^2+1)} - \frac{15}{a^3+1}$

Bài 6. Thực hiện phép tính

a) $\frac{1}{x} \cdot \frac{6x}{y}$

b) $\frac{2x^2}{y} \cdot 3xy^2$

c) $\frac{15x}{7y^3} \cdot \frac{2y^2}{x^2}$

d) $\frac{2x^2}{x-y} \cdot \frac{y}{5x^3}$

e) $\frac{5x+10}{4x-8} \cdot \frac{4-2x}{x+2}$

f) $\frac{x^2-36}{2x+10} \cdot \frac{3}{6-x}$

g) $\frac{x^2-9y^2}{x^2y^2} \cdot \frac{3xy}{2x-6y}$

h) $\frac{3x^2-3y^2}{5xy} \cdot \frac{15x^2y}{2y-2x}$

i) $\frac{2a^3-2b^3}{3a+3b} \cdot \frac{6a+6b}{a^2-2ab+b^2}$

Bài 7. Thực hiện phép tính

a) $\frac{2x}{3} : \frac{5}{6x^2}$

b) $16x^2y^2 : \left(-\frac{18x^2y^5}{5} \right)$

c) $\frac{25x^3y^5}{3} : 15xy^2$

d) $\frac{x^2-y^2}{6x^2y} : \frac{x+y}{3xy}$

e) $\frac{a^2+ab}{b-a} : \frac{a+b}{2a^2-2b^2}$

f) $\frac{x+y}{y-x} : \frac{x^2+xy}{3x^2-3y^2}$

g) $\frac{1-4x^2}{x^2+4x} : \frac{2-4x}{3x}$

h) $\frac{5x-15}{4x+4} : \frac{x^2-9}{x^2+2x+1}$

i) $\frac{6x+48}{7x-7} : \frac{x^2-64}{x^2-2x+1}$

k) $\frac{4x-24}{5x+5} : \frac{x^2-36}{x^2+2x+1}$

l) $\frac{3x+21}{5x+5} : \frac{x^2-49}{x^2+2x+1}$

m) $\frac{3-3x}{(1+x)^2} : \frac{6x^2-6}{x+1}$

Bài 8. Thực hiện phép tính

$$\begin{aligned} \text{a)} & \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right) & \text{b)} & \left(\frac{3x}{1-3x} + \frac{2x}{3x+1} \right) : \frac{6x^2+10x}{1-6x+9x^2} \\ \text{c)} & \left(\frac{9}{x^3-9x} + \frac{1}{x+3} \right) : \left(\frac{x-3}{x^2+3x} - \frac{x}{3x+9} \right) & \text{d)} & \frac{x+1}{x+2} : \left(\frac{x+2}{x+3} : \frac{x+3}{x+1} \right) \end{aligned}$$

Bài 9. Rút gọn các biểu thức sau

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{y}} & \text{b)} & \frac{\frac{x}{x+1} - \frac{x-1}{x}}{\frac{x}{x-1} - \frac{x+1}{x}} & \text{c)} & 1 - \frac{x}{1 - \frac{x}{x+1}} \\ \text{d)} & \frac{1 - \frac{2}{x+1}}{1 - \frac{x^2-2}{x^2-1}} & \text{e)} & \frac{\frac{x}{y} + \frac{y}{x}}{\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y}} & \text{f)} & \frac{\frac{a-x}{a} + \frac{x}{a-x}}{\frac{a+x}{a} - \frac{x}{a+x}} \end{aligned}$$

Bài 10. Tìm các giá trị nguyên của biến số x để biểu thức đã cho cũng có giá trị nguyên:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{x^3 - x^2 + 2}{x-1} & \text{b)} & \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x-2} & \text{c)} & \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 2}{2x+1} \\ \text{d)} & \frac{3x^3 - 7x^2 + 11x - 1}{3x-1} & \text{e)} & \frac{x^4 - 16}{x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16} \end{aligned}$$

Bài 11. Phân tích các phân thức sau thành tổng các phân thức mà mẫu thức là các nhị thức bậc nhất:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{2x-1}{x^2-5x+6} & \text{b)} & \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)} & \text{c)} & \frac{3x^2+3x+12}{(x-1)(x+2)x} \end{aligned}$$

Bài 12. Tìm các số A, B, C để có:

$$\begin{aligned} \text{a)} & \frac{x^2-x+2}{(x-1)^3} = \frac{A}{(x-1)^3} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-1} & \text{b)} & \frac{x^2+2x-1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \end{aligned}$$

Bài 13. Tính các tổng:

$$\begin{aligned} \text{a)} & A = \frac{a}{(a-b)(a-c)} + \frac{b}{(b-a)(b-c)} + \frac{c}{(c-a)(c-b)} \\ \text{b)} & B = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \end{aligned}$$

Bài 14. Tính các tổng:

$$\begin{aligned} \text{a)} & A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} & \text{HD:} & \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \\ \text{b)} & B = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{3.4.5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$HD: \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} \right) - \frac{1}{k+1}$$

Bài 15. Chứng minh rằng với mọi $m \in \mathbb{N}$, ta có:

a) $\frac{4}{4m+2} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)(2m+1)}$

b) $\frac{4}{4m+3} = \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+1)(4m+3)}$

c) $\frac{4}{8m+5} = \frac{1}{2(m+1)} + \frac{1}{2(m+1)(3m+2)} + \frac{1}{2(3m+2)(8m+5)}$

d) $\frac{4}{3m+2} = \frac{1}{m+1} + \frac{1}{3m+2} + \frac{1}{(m+1)(3m+2)}$

Bài tập tổng hợp chuyên đề phân thức

Bài 1. Thực hiện phép tính:

a) $\frac{8}{(x^2+3)(x^2-1)} + \frac{2}{x^2+3} + \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{x+y}{2(x-y)} - \frac{x-y}{2(x+y)} + \frac{2y^2}{x^2-y^2}$

c) $\frac{x-1}{x^3} - \frac{x+1}{x^3-x^2} + \frac{3}{x^3-2x^2+x}$

d) $\frac{xy}{ab} + \frac{(x-a)(y-a)}{a(a-b)} - \frac{(x-b)(y-b)}{b(a-b)}$

e) $\frac{x^3}{x-1} - \frac{x^2}{x+1} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$

f) $\frac{x^3+x^2-2x-20}{x^2-4} - \frac{5}{x+2} + \frac{3}{x-2}$

g) $\left(\frac{x-y}{x+y} + \frac{x+y}{x-y} \right) \cdot \left(\frac{x^2+y^2}{2xy} + 1 \right) \cdot \frac{xy}{x^2+y^2}$

h) $\frac{1}{(a-b)(b-c)} + \frac{1}{(b-c)(c-a)} + \frac{1}{(c-a)(a-b)}$

i) $\frac{[a^2-(b+c)^2](a+b-c)}{(a+b+c)(a^2+c^2-2ac-b^2)}$

k) $\left[\frac{x^2-y^2}{xy} - \frac{1}{x+y} \left(\frac{x^2}{y} - \frac{y^2}{x} \right) \right] : \frac{x-y}{x}$

Bài 2. Rút gọn các phân thức:

a) $\frac{25x^2-20x+4}{25x^2-4}$

b) $\frac{5x^2+10xy+5y^2}{3x^3+3y^3}$

c) $\frac{x^2-1}{x^3-x^2-x+1}$

d) $\frac{x^3+x^2-4x-4}{x^4-16}$

e) $\frac{4x^4-20x^3+13x^2+30x+9}{(4x^2-1)^2}$

Bài 3. Rút gọn rồi tính giá trị các biểu thức:

a) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2-b^2+c^2+2ac}$ với $a=4, b=-5, c=6$

b) $\frac{16x^2-40xy}{8x^2-24xy}$ với $\frac{x}{y} = \frac{10}{3}$

$$c) \frac{\frac{x^2 + xy + y^2}{x+y} - \frac{x^2 - xy + y^2}{x-y}}{x-y - \frac{x^2}{x+y}} \text{ với } x=9, y=10$$

Bài 4. Biểu diễn các phân thức sau dưới dạng tổng của một đa thức và một phân thức với bậc của tử thức nhỏ hơn bậc chứa mẫu thức:

$$\begin{array}{ll} a) \frac{x^2 + 3}{x^2 - 1} & b) \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \\ c) \frac{x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 5}{x^2 + 1} & d) \frac{x^5 - 2x^4 - x - 3}{x + 1} \end{array}$$

Bài 5. Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức sau cũng có giá trị nguyên:

$$a) \frac{1}{x+2} \quad b) \frac{-1}{2x+3} \quad c) \frac{x^3 - x^2 + 2}{x-1} \quad d) \frac{x^3 - 2x^2 + 4}{x-2}$$

Bài 6. Cho biểu thức:
$$P = \frac{3x^2 + 3x}{(x+1)(2x-6)}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
- b) Tìm giá trị của x để $P = 1$.

Bài 7. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x+2}{x+3} - \frac{5}{x^2 + x - 6} + \frac{1}{2-x}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
- b) Rút gọn biểu thức P.
- c) Tìm x để $P = \frac{-3}{4}$.
- d) Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức P cũng có giá trị nguyên.
- e) Tính giá trị của biểu thức P khi $x^2 - 9 = 0$.

Bài 8. Cho biểu thức:
$$P = \frac{(a+3)^2}{2a^2 + 6a} \cdot \left(1 - \frac{6a-18}{a^2-9}\right)$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
- b) Rút gọn biểu thức P.
- c) Với giá trị nào của a thì $P = 0$; $P = 1$.

Bài 9. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x}{2x-2} + \frac{x^2+1}{2-2x^2}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
- b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = -\frac{1}{2}$.

Bài 10. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Tìm giá trị của x để $P = 1$; $P = -3$.

Bài 11. Cho biểu thức:
$$P = \frac{2}{2x + 3} + \frac{3}{2x + 1} - \frac{6x + 5}{(2x + 3)(2x - 3)}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tìm giá trị của x để $P = -1$.

Bài 12. Cho biểu thức:
$$P = \frac{1}{x + 5} + \frac{2}{x - 5} - \frac{2x + 10}{(x + 5)(x - 5)}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Cho $P = -3$. Tính giá trị của biểu thức $Q = 9x^2 - 42x + 49$.

Bài 13. Cho biểu thức:
$$P = \frac{3}{x + 3} + \frac{1}{x - 3} - \frac{18}{9 - x^2}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tìm giá trị của x để $P = 4$.

Bài 14. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2}{5x + 25} + \frac{2x - 10}{x} + \frac{50 + 5x}{x^2 + 5x}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tìm giá trị của x để $P = -4$.

Bài 15. Cho biểu thức:
$$P = \frac{3x^2 + 6x + 12}{x^3 - 8}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.
b) Rút gọn biểu thức P.
c) Tính giá trị của P với $x = \frac{4001}{2000}$.

Bài 16. Cho biểu thức:
$$P = \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{x}{1 - x^3} \cdot \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \right) : \frac{2x + 1}{x^2 + 2x + 1}$$

- a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P khi $x = \frac{1}{2}$.

Bài 17. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2 + 2x}{2x + 10} + \frac{x - 5}{x} + \frac{50 - 5x}{2x(x + 5)}$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{1}{4}$.

d) Tìm giá trị của x để $P > 0$; $P < 0$.

Bài 18. Cho biểu thức:
$$P = \left[\frac{x + 1}{2x - 2} + \frac{3}{x^2 - 1} - \frac{x + 3}{2x + 2} \right] \cdot \frac{4x^2 - 4}{5}$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) CMR: khi giá trị của biểu thức được xác định thì nó không phụ thuộc vào giá trị của biến x?

Bài 19. Cho biểu thức:
$$P = \left(\frac{5x + 2}{x^2 - 10} + \frac{5x - 2}{x^2 + 10} \right) \cdot \frac{x^2 - 100}{x^2 + 4}$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Rút gọn biểu thức P.

c) Tính giá trị của P khi $x = 20040$.

Bài 20. Cho biểu thức:
$$P = \frac{x^2 - 10x + 25}{x^2 - 5x}$$

a) Tìm điều kiện xác định của P.

b) Tìm giá trị của x để $P = 0$; $P = \frac{5}{2}$.

c) Tìm giá trị nguyên của x để P cũng có giá trị nguyên.

CHUYÊN ĐỀ 3. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN

Dạng 1. Giải phương trình bậc nhất

Bài 1. Giải các phương trình sau bằng cách đưa về dạng $ax + b = 0$:

a) $3x - 2 = 2x - 3$

b) $3 - 4y + 24 + 6y = y + 27 + 3y$

c) $7 - 2x = 22 - 3x$

d) $8x - 3 = 5x + 12$

e) $x - 12 + 4x = 25 + 2x - 1$

f) $x + 2x + 3x - 19 = 3x + 5$

g) $11 + 8x - 3 = 5x - 3 + x$

h) $4 - 2x + 15 = 9x + 4 - 2x$

i) $2\left(x + \frac{3}{5}\right) = 5 - \left(\frac{13}{5} + x\right)$

j) $\frac{7}{8}x - 5(x - 9) = \frac{20x + 1,5}{6}$

k) $\frac{7x - 1}{6} + 2x = \frac{16 - x}{5}$

l) $4(0,5 - 1,5x) = -\frac{5x - 6}{3}$

m) $\frac{2x - 1}{5} - \frac{x - 2}{3} = \frac{x + 7}{15}$

n) $\frac{1}{4}(x + 3) = 3 - \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{1}{3}(x + 2)$

p) $\frac{x}{3} - \frac{2x + 1}{6} = \frac{x}{6} - x$

q) $\frac{2 + x}{5} - 0,5x = \frac{1 - 2x}{4} + 0,25$

r) $\frac{3x - 11}{11} - \frac{x}{3} = \frac{3x - 5}{7} - \frac{5x - 3}{9}$

s) $\frac{9x - 0,7}{4} - \frac{5x - 1,5}{7} = \frac{7x - 1,1}{6} - \frac{5(0,4 - 2x)}{6}$

t) $\frac{2x - 8}{6} - \frac{3x + 1}{4} = \frac{9x - 2}{8} + \frac{3x - 1}{12}$

u) $\frac{x + 5}{4} - \frac{2x - 3}{3} = \frac{6x - 1}{3} + \frac{2x - 1}{12}$

v) $\frac{5x - 1}{10} + \frac{2x + 3}{6} = \frac{x - 8}{15} - \frac{x}{30}$

w) $\frac{2x - \frac{4 - 3x}{5}}{15} = \frac{7x - \frac{x - 3}{2}}{5} - x + 1$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $\frac{5(x - 1) + 2}{6} - \frac{7x - 1}{4} = \frac{2(2x + 1)}{7} - 5$

b) $x - \frac{3(x + 30)}{15} - 24\frac{1}{2} = \frac{7x}{10} - \frac{2(10x + 2)}{5}$

c) $14\frac{1}{2} - \frac{2(x + 3)}{5} = \frac{3x}{2} - \frac{2(x - 7)}{3}$

d) $\frac{x + 1}{3} + \frac{3(2x + 1)}{4} = \frac{2x + 3(x + 1)}{6} + \frac{7 + 12x}{12}$

e) $\frac{3(2x - 1)}{4} - \frac{3x + 1}{10} + 1 = \frac{2(3x + 2)}{5}$

f) $x - \frac{3}{17}(2x - 1) = \frac{7}{34}(1 - 2x) + \frac{10x - 3}{2}$

g) $\frac{3(x - 3)}{4} + \frac{4x - 10,5}{10} = \frac{3(x + 1)}{5} + 6$

h) $\frac{2(3x + 1) + 1}{4} - 5 = \frac{2(3x - 1)}{5} - \frac{3x + 2}{10}$

Bài 3. Tìm giá trị của x sao cho các biểu thức A và B cho sau đây có giá trị bằng nhau:

a) $A = (x - 3)(x + 4) - 2(3x - 2)$

và $B = (x - 4)^2$

b) $A = (x + 2)(x - 2) + 3x^2$

và $B = (2x + 1)^2 + 2x$

c) $A = (x - 1)(x^2 + x + 1) - 2x$

và $B = x(x - 1)(x + 1)$

d) $A = (x + 1)^3 - (x - 2)^3$

và $B = (3x - 1)(3x + 1)$.

Bài 4. Giải các phương trình sau:

a) $\frac{(2x + 1)^2}{5} - \frac{(x - 1)^2}{3} = \frac{7x^2 - 14x - 5}{15}$

b) $\frac{7x - 1}{6} + 2x = \frac{16 - x}{5}$

c) $\frac{(x - 2)^2}{3} - \frac{(2x - 3)(2x + 3)}{8} + \frac{(x - 4)^2}{6} = 0$

Bài 5. Giải các phương trình sau:

$$a) x + \frac{2x + \frac{x-1}{5}}{3} = 1 - \frac{3x - \frac{1-2x}{3}}{5}$$

$$b) \frac{3x-1-\frac{x-1}{2}}{3} - \frac{2x+\frac{1-2x}{3}}{2} = \frac{\frac{3x-1}{2}-6}{5}$$

Bài 6. Giải các phương trình sau:

$$a) \frac{x-23}{24} + \frac{x-23}{25} = \frac{x-23}{26} + \frac{x-23}{27}$$

$$b) \left(\frac{x+2}{98} + 1\right) + \left(\frac{x+3}{97} + 1\right) = \left(\frac{x+4}{96} + 1\right) + \left(\frac{x+5}{95} + 1\right)$$

$$c) \frac{x+1}{2004} + \frac{x+2}{2003} = \frac{x+3}{2002} + \frac{x+4}{2001}$$

$$d) \frac{201-x}{99} + \frac{203-x}{97} = \frac{205-x}{95} + 3 = 0$$

$$e) \frac{x-45}{55} + \frac{x-47}{53} = \frac{x-55}{45} + \frac{x-53}{47}$$

$$f) \frac{x+1}{9} + \frac{x+2}{8} = \frac{x+3}{7} + \frac{x+4}{6}$$

$$g) \frac{x+2}{98} + \frac{x+4}{96} = \frac{x+6}{94} + \frac{x+8}{92}$$

$$h) \frac{2-x}{2002} - 1 = \frac{1-x}{2003} - \frac{x}{2004}$$

$$i) \frac{x^2-10x-29}{1971} + \frac{x^2-10x-27}{1973} = \frac{x^2-10x-1971}{29} + \frac{x^2-10x-1973}{27}$$

Bài 7. Tìm x sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{6x-1}{3x+2}$ và $\frac{2x+5}{x-3}$ bằng nhau.

Bài 8. Tìm y sao cho giá trị của hai biểu thức $\frac{y+5}{y-1} - \frac{y+1}{y-3}$ và $\frac{-8}{(y-1)(y-3)}$ bằng nhau.

Bài 9. Giải các phương trình tích sau:

$$a) (3x-2)(4x+5) = 0$$

$$b) (2,3x-6,9)(0,1x+2) = 0$$

$$c) (4x+2)(x^2+1) = 0$$

$$d) (2x+7)(x-5)(5x+1) = 0$$

$$e) (x-1)(2x+7)(x^2+2) = 0$$

$$f) (4x-10)(24+5x) = 0$$

$$g) (3,5-7x)(0,1x+2,3) = 0$$

$$h) (5x+2)(x-7) = 0$$

$$i) 15(x+9)(x-3)(x+21) = 0$$

$$j) (x^2+1)(x^2-4x+4) = 0$$

Dạng 2. Tìm tham số thỏa mãn điều kiện

Bài 1. Tìm giá trị của k sao cho:

$$a) \text{Phương trình: } 2x + k = x - 1 \text{ có nghiệm } x = -2.$$

$$b) \text{Phương trình: } (2x+1)(9x+2k) - 5(x+2) = 40 \text{ có nghiệm } x = 2$$

$$c) \text{Phương trình: } 2(2x+1) + 18 = 3(x+2)(2x+k) \text{ có nghiệm } x = 1$$

$$d) \text{Phương trình: } 5(m+3x)(x+1) - 4(1+2x) = 80 \text{ có nghiệm } x = 2$$

Bài 2. Tìm các giá trị của m, a và b để các cặp phương trình sau đây tương đương:

$$a) mx^2 - (m+1)x + 1 = 0 \quad \text{và} \quad (x-1)(2x-1) = 0$$

$$b) (x-3)(ax+2) = 0 \quad \text{và} \quad (2x+b)(x+1) = 0$$

Bài 3. Tìm các giá trị của a sao cho mỗi biểu thức sau có giá trị bằng 2.

a) $\frac{2a^2 - 3a - 2}{a^2 - 4}$

b) $\frac{3a - 1}{3a + 1} + \frac{a - 3}{a + 3}$

CHUYÊN ĐỀ 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP PHƯƠNG TRÌNH

Các bước giải bài toán bằng cách lập phương trình.

Bước 1: Lập phương trình:

- Chọn ẩn số (ghi rõ đơn vị) và đặt điều kiện cho ẩn;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải phương trình

Bước 3: Kết luận (Kiểm tra xem trong các nghiệm của phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không rồi kết luận).

Dạng 1. Toán tìm hai số biết tổng hoặc hiệu hoặc tỉ số

Bài 1. Hiệu hai số là 12. Nếu chia số bé cho 7 và lớn cho 5 thì thương thứ nhất lớn hơn thương thứ hai là 4 đơn vị. Tìm hai số đó.

Bài 2. Một số tự nhiên có hai chữ số, tổng các chữ số của nó là 16, nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau được một số lớn hơn số đã cho là 18 đơn vị. Tìm số đã cho.

Dạng 2. Bài toán chuyển động

Bài 1. Một người dự định đi từ Hà Nội về Thanh Hóa. Ban đầu Người đó dự định đi xe máy với vận tốc 50km/h. Nhưng sau đó người đó lại đi ô tô với vận tốc 60km/h nên đã đến sớm hơn dự định là 1 giờ. Tính quãng đường từ Hà Nội vào đến Thanh Hóa

Bài 2. Một người đi từ A đến B. Lúc đầu người đó dự định đi với vận tốc là 40km/h, nhưng đi được $\frac{1}{2}$ quãng đường thì người đó dừng xe nghỉ 20 phút. Để đến B đúng dự định người đó phải đi với vận tốc mới lớn hơn vận tốc cũ là 10km/h. Tính quãng đường AB.

Bài 3. Một xe máy khởi hành từ A đến B vào lúc 10 h sáng với vận tốc là 45km/h. Lúc 11h sáng, một ô tô cũng xuất phát từ A đến B với vận tốc là 60km/h. Hỏi 2 xe gặp nhau lúc mấy giờ?

Bài 4. Một xe máy đi từ A đến B với vận tốc 50km/h. Đến B người đó nghỉ 15 phút rồi quay về A với vận tốc 40km/h. Biết thời gian tổng cộng hết 2 giờ 30 phút. Tính quãng đường AB.

Bài 5. Một người đi ô tô từ A đến B dài 240 km, trên nửa quãng đường đầu đi với vận tốc dự định, trên nửa quãng đường sau người đó đi với vận tốc bằng $\frac{3}{2}$ vận tốc dự định. Tính vận tốc dự định, biết thời gian đi trên cả quãng đường là 5 giờ ?

Bài 6. Đường sông từ thành phố A đến thành phố B ngắn hơn đường bộ là 10 km. Canô đi từ A đến B hết 3h20' còn ô tô đi hết 2h. Vận tốc của canô nhỏ hơn vận tốc của ô tô là 17 km/h. Tính vận tốc của canô ?

Dạng 3. Bài toán tìm tuổi, tìm số sách, tính số lượng ghế, số công nhân

Bài 1. Hai thư viện có cả thảy 15000 cuốn sách. Nếu chuyển từ thư viện thứ nhất sang thư viện thứ hai 3000 cuốn, thì số sách của hai thư viện bằng nhau. Tính số sách lúc đầu ở mỗi thư viện.

Bài 2. Số công nhân của hai xí nghiệp trước kia tỉ lệ với 3 và 4. Nay xí nghiệp 1 thêm 40 công nhân, xí nghiệp 2 thêm 80 công nhân. Do đó số công nhân hiện nay của hai xí nghiệp tỉ lệ với 8 và 11. Tính số công nhân của mỗi xí nghiệp hiện nay.

Bài 3. Tính tuổi của hai người, biết rằng cách đây 10 năm tuổi người thứ nhất gấp 3 lần tuổi của người thứ hai và sau đây hai năm, tuổi người thứ hai sẽ bằng một nửa tuổi của người thứ nhất.

Bài 4. Một phòng họp có 100 chỗ ngồi, nhưng số người đến họp là 144. Do đó, người ta phải kê thêm 2 dãy ghế và mỗi dãy ghế phải thêm 2 người ngồi. Hỏi phòng họp lúc đầu có mấy dãy ghế?

Dạng 4. Bài toán năng suất, làm chung

Bài 1. Một công nhân dự định sẽ hoàn thành công việc được giao trong 5 giờ. Lúc đầu mỗi giờ người đó làm được 12 sản phẩm. Khi làm được một nửa số lượng công việc được giao, nhờ cải tiến kỹ thuật nên mỗi giờ người đó làm thêm được 3 sản phẩm nữa. Nhờ vậy, công việc hoàn thành trước thời hạn 30 phút. Tính số sản phẩm người công nhân đó dự định làm?

Bài 2. Hai người thợ Thành và Long cùng làm chung một công việc theo dự định 6 ngày thì xong. Làm chung được 4 ngày thì Thành bị bệnh phải nghỉ, Long phải làm một mình trong 5 ngày nữa thì mới xong. Hỏi nếu làm một mình cả công việc thì mỗi người mất bao nhiêu ngày?

Bài 3. Ba người cùng làm chung một công việc thì sau 3 giờ xong. Nếu làm một mình thì người thứ nhất làm công việc ấy mất 8 giờ mới xong và người thứ hai làm công việc một mình ấy mất 12 giờ mới xong. Hỏi người thứ ba làm một mình công việc ấy mất bao lâu mới xong ?

Bài 4. Một đơn vị bộ đội tham gia đắp một đoạn đê trong một số ngày quy định. Nếu mỗi ngày họ đắp được 50m đê thì họ hoàn thành công việc sớm hơn dự định là 1 ngày. Nếu mỗi ngày họ chỉ đắp 35 m đê thì họ phải hoàn thành công việc chậm hơn 2 ngày so với quy định. Tính chiều dài đoạn đê mà họ phải đắp?

Bài toán tổng hợp

Bài 1. Thư viện của một trường THCS có hai kệ sách. Số sách của kệ thứ nhất gấp 3 lần số sách của kệ thứ hai. Nếu chuyển 30 quyển sách từ kệ thứ nhất sang kệ thứ hai thì số sách của kệ thứ nhất gấp 2 lần số sách của kệ thứ hai. Hỏi thư viện đó có bao nhiêu quyển sách?

Bài 2. Một bạn học sinh đi học từ nhà đến trường với vận tốc trung bình 4 km/h. Sau khi đi được $\frac{2}{3}$ quãng đường bạn ấy đã tăng vận tốc lên gấp rưỡi trong quãng đường còn lại. Tính quãng đường từ nhà đến trường của bạn học sinh đó, biết rằng thời gian bạn ấy đi từ nhà đến trường là 40 phút.

Bài 3. Theo kế hoạch, đội sản xuất cần gieo mạ trong 12 ngày. Đến khi thực hiện đội đã nâng định mức thêm 7 ha mỗi ngày vì thế hoàn thành gieo mạ trong 10 ngày. Hỏi mỗi ngày đội gieo được bao nhiêu ha và tổng diện tích gieo là bao nhiêu?

Bài 4. Một người được giao làm một số sản phẩm, dự định mỗi giờ làm 35 SP, nhưng thực tế mỗi giờ làm được 47 SP. Vì vậy, không những hoàn thành sớm 1 giờ mà còn làm vượt mức được giao 1 SP. Hỏi người đó được giao làm bao nhiêu SP?

Bài 5. Một hình chữ nhật có chu vi là 30cm. Nếu tăng chiều rộng 1cm và chiều dài 2cm thì diện tích tăng thêm 23cm^2 . Tính chiều dài, chiều rộng ban đầu?

Bài 6. Một phân số có tử nhỏ hơn mẫu là 8. Nếu cả mẫu và tử đều thêm 7 thì ta được một phân số mới có giá trị là $\frac{3}{5}$. Tìm phân số ban đầu?

Bài 7. Thương của hai số bằng 3. Nếu gấp 2 lần số chia và giảm số bị chia đi 26 đơn vị thì số thứ nhất thu được nhỏ hơn số thứ hai thu được là 16 đơn vị. Tìm hai số lúc đầu ?

Bài 8. Hai vòi nước cùng chảy vào 1 bể thì sau 5h đầy bể. Nếu để vòi 1 chảy một mình thì sau 8h30 phút mới đầy bể. Hỏi nếu để vòi 2 chảy một mình từ 10h sáng thì đến mấy giờ mới đầy bể?

PHẦN HÌNH HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1. TỨ GIÁC

Dạng 1: Sử dụng tính chất về các góc của một tứ giác để tính góc

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $B = 120^0, C = 60^0, D = 90^0$. Tính góc A và góc ngoài tại đỉnh A.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $AB = AD, CB = CD, C = 60^0, A = 100^0$.

- a. Chứng minh AC là đường trung trực của BD.
- b. Tính B, D.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD có phân giác trong của góc A và góc B cắt nhau tại E, phân giác ngoài của góc A và góc B cắt nhau tại F. Chứng minh: $\angle AEB = \frac{C+D}{2}$ và

$$\angle AFB = \frac{A+B}{2}.$$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có $B + D = 180^0, CB = CD$. Trên tia đối của tia DA lấy điểm E sao cho $DE = AB$. Chứng minh:

- a. Các tam giác ABC và EDC bằng nhau.
- b. AC là phân giác của góc A.

Bài 5. Cho tứ giác ABCD biết số đo của các góc A, B, C, D tỉ lệ thuận với 5; 8; 13 và 10.

- a. Tính số đo các góc của tứ giác ABCD.
- b. Kéo dài hai cạnh AB và DC cắt nhau ở E, kéo dài hai cạnh AD và BC cắt nhau ở F. Hai tia phân giác của các góc AED và góc AFB cắt nhau ở O. Phân giác của góc AFB cắt các cạnh CD và AB tại M và N. Chứng minh O là trung điểm của đoạn MN.

Bài 6. Cho tứ giác ABCD có $B + D = 180^0$, AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh $CB = CD$.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD có $A = a, C = b$. Hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Các tia phân giác của hai góc AEB và AFD cắt nhau tại I. Tính góc EIF theo a, b.

Dạng 2: Sử dụng bất đẳng thức tam giác để giải các bài toán liên hệ đến các cạnh của một tứ giác

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh:

- a) $AB < BC + CD + AD$
- b) $AC + BD < AB + BC + CD + AD$

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $AB + BD \leq AC + CD$. Chứng minh: $AB < AC$.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

a. Chứng minh: $\frac{AB + BC + CD + AD}{2} < OA + OB + OC + OD < AB + BC + CD + AD$.

b. Khi O là điểm bất kì thuộc miền trong của tứ giác ABCD, kết luận trên có đúng không?

Bài 4. Chứng minh rằng trong một tứ giác thì:

- Tổng độ dài 2 cạnh đối diện nhỏ hơn tổng độ dài hai đường chéo.
- Tổng độ dài hai đường chéo lớn hơn nửa chu vi của tứ giác.

CHUYÊN ĐỀ 2. HÌNH THANG & HÌNH THANG VUÔNG

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa

- Hình thang là tứ giác có hai cạnh đối song song.
- Hình thang vuông là hình thang có một góc vuông.

2. Tính chất

- Nếu một hình thang có hai cạnh bên song song thì hai cạnh bên bằng nhau, hai cạnh đáy bằng nhau.
- Nếu một hình thang có hai cạnh đáy bằng nhau thì hai cạnh bên song song và bằng nhau.

II. Bài tập

Dạng 1: Tính chất các góc của một hình thang

Bài 1. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $A - D = 20^\circ$, $B = 2C$.

Tính các góc của hình thang.

Bài 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$, $AD = BC = AB$, $BDC = 30^\circ$.

Tính các góc của hình thang.

Bài 3. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AB < CD$.

Chứng minh rằng: $A + B > C + D$.

Bài 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Hai đường phân giác của góc A và B cắt nhau tại điểm K thuộc đáy CD. Chứng minh $AD + BC = DC$.

Bài 5. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$).

- Chứng minh rằng nếu hai tia phân giác của hai góc A và D cùng đi qua trung điểm F của cạnh bên BC thì cạnh bên AD bằng tổng hai đáy.
- Chứng minh rằng nếu $AD = AB + CD$ thì hai tia phân giác của hai góc A và D cắt nhau tại trung điểm của cạnh bên BC.

Bài 6. Cho hình thang ABCD có $A = B = 90^0$ và $BC = AB = \frac{AD}{2}$. Lấy điểm M thuộc đáy nhỏ BC. Kẻ $Mx \perp MA$, Mx cắt CD tại N. Chứng minh rằng tam giác AMN vuông cân.

Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang, hình thang vuông

Bài 1. Cho tứ giác ABCD có $AB = BC$ và AC là tia phân giác của góc A. Chứng minh ABCD là hình thang.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A. Lấy điểm M thuộc cạnh BC sao cho $AM = \frac{1}{2}BC$, N là trung điểm cạnh AB. Chứng minh:

- a. Tam giác AMB cân.
- b. Tứ giác MNAC là hình thang vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Kẻ đường cao AH. Từ H kẻ $HD \perp AC$, $HE \perp AB$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng HB, HC. Chứng minh tứ giác DEMN là hình thang vuông.

CHUYÊN ĐỀ 3. HÌNH THANG CÂN

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa:

Hình thang cân là hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau.

2. Tính chất: Trong hình thang cân có

- Hai cạnh bên bằng nhau.
- Hai đường chéo bằng nhau.

3. Dấu hiệu nhận biết:

- Hình thang có hai góc kề một đáy bằng nhau là hình thang cân.

Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là hình thang cân.

II. Bài tập

Dạng 1. Sử dụng tính chất của hình thang cân để tính toán và chứng minh

Bài 1. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Kẻ các đường cao AE, BF của hình thang. Chứng minh rằng $DE = CF$.

Bài 2. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$).

- a. Chứng minh: $\angle ACD = \angle BDC$.
- b. Gọi E là giao điểm của AC và BD. Chứng minh: $EA = EB$.

Bài 3. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB > CD$) có $CD = a$, $A + B = \frac{1}{2}(C + D)$.

Đường chéo AC vuông góc với cạnh bên BC.

- Tính các góc của hình thang.
- Chứng minh AC là phân giác của góc DAB .
- Tính diện tích của hình thang.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$) có $BDC = 45^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD.

- Chứng minh tam giác DOC vuông cân.
- Tính diện tích của hình thang ABCD, biết $BD = 6$ (cm).

Dạng 2. Chứng minh một tứ giác là hình thang cân

Bài 1. Cho tam giác ABC cân tại A, các đường phân giác BD, CE ($D \in AC$, $E \in AB$). Chứng minh rằng BEDC là hình thang cân có đáy nhỏ bằng cạnh bên.

Bài 2. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $ACD = BDC$. Chứng minh rằng ABCD là hình thang cân.

Bài 3. Cho tam giác ABC cân tại A. Trên các cạnh AB, AC lấy lần lượt các điểm D và E sao cho $AD = AE$.

- Chứng minh BDEC là hình thang cân.
- Tính các góc của hình thang cân đó, biết $A = 50^\circ$.

Bài 4. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$) có $AC = BD$. Qua B kẻ đường thẳng song song với AC cắt đường thẳng DC tại E. Chứng minh:

- Tam giác BDE là tam giác cân.
- Các tam giác ACD và BDC bằng nhau.
- ABCD là hình thang cân.

Bài 5. Cho tam giác đều ABC và điểm M thuộc miền trong của tam giác. Qua M kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB ở D, đường thẳng song song với AC cắt BC ở E, đường thẳng song song với AB cắt AC ở F. Chứng minh:

- Các tứ giác BDME, CFME, ADMF là các hình thang cân.
- Chu vi của tam giác DEF bằng tổng các khoảng cách từ M đến các đỉnh của tam giác ABC.
- $DME = DMF = EMF$.

Bài 6. Cho hình thang ABCD ($AD \parallel BC$, $AD > BC$) có đường chéo AC vuông góc với cạnh bên CD, $BAC = CAD$ và $D = 60^\circ$.

- Chứng minh ABCD là hình thang cân.
- Tính độ dài cạnh đáy AD, biết chu vi hình thang bằng 20 cm.

CHUYÊN ĐỀ 4. ĐƯỜNG TRUNG BÌNH CỦA TAM GIÁC, HÌNH THANG

I. Lý thuyết

1. Đường trung bình của tam giác

- Đường trung bình của tam giác là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh của tam giác.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh của tam giác và song song với cạnh thứ hai thì đi qua trung điểm cạnh thứ ba.
- Đường trung bình của tam giác thì song song với cạnh thứ ba và bằng nửa cạnh ấy.

2. Đường trung bình của hình thang

- Đường trung bình của hình thang là đoạn thẳng nối trung điểm hai cạnh bên của hình thang.
- Đường thẳng đi qua trung điểm một cạnh bên của hình thang và song song với hai đáy thì đi qua trung điểm cạnh bên thứ hai.
- Đường trung bình của hình thang thì song song với hai đáy và bằng nửa tổng hai đáy.

II. Bài tập

Bài 1. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Trên cạnh AB, lấy hai điểm D, E sao cho $AD = DE = EB$. Gọi I là giao điểm của AM với CD. Chứng minh: $AI = IM$.

Bài 2. Cho tam giác ABC và hai đường trung tuyến BD, CE cắt nhau tại G. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BG, CG. Chứng minh tứ giác MNDE có các cặp cạnh đối song song và bằng nhau.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Trên tia BA lấy điểm D sao cho A là trung điểm BD. Trên tia CB lấy điểm E sao cho B là trung điểm CE. Hai đường thẳng AC và DE cắt nhau tại I. Chứng minh rằng: $DI = \frac{DE}{3}$.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có góc $C = 40^\circ$, $D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB và CD. Tính góc nhọn tạo bởi đường thẳng FE với các đường thẳng AD và BC.

Bài 5. Cho A, B, C theo thứ tự nằm trên đường thẳng d ($AB > BC$). Trên cùng nửa mặt phẳng bờ là d , vẽ các tam giác đều AMB và BNC. Gọi P, Q, R, S lần lượt là trung điểm của BM, CM, BN, AN. Chứng minh:

- a. PQRS là hình thang cân.

b. $SQ = \frac{1}{2}MN$.

Bài 6. Cho tam giác ABC, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AM, D là giao điểm của BI và AC.

a. Chứng minh: $AD = \frac{1}{2}DC$.

b. So sánh độ dài BD và ID.

Bài 7. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng AD, BC, AC, BD.

a. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q nằm trên một đường thẳng.

b. Tính MN, PQ, biết các cạnh đáy của hình thang $AB = a, CD = b (a > b)$.

c. Chứng minh rằng nếu $MP = PQ = QN$ thì $a = 2b$.

Bài 8. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, BD. Chứng minh ba điểm E, K, F thẳng hàng.

Bài 9. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD và BC. Đường thẳng EF cắt BD ở I, cắt AC ở K.

a. Chứng minh: $AK = KC, BI = ID$.

b. Cho $AB = 6, CD = 10$. Tính EI, KF, IK.

Bài 10. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, K lần lượt là trung điểm của AD, BC, AC.

a. So sánh độ dài các đoạn thẳng EK và CD, KF và AB.

b. Chứng minh: $EF \leq \frac{AB + CD}{2}$.

c. Khi $EF = \frac{AB + CD}{2}$ thì tứ giác ABCD là hình gì.

Bài 11. Tính độ dài đường trung bình của một hình thang cân biết rằng các đường chéo của nó vuông góc với nhau và đường cao bằng 10 cm.

Bài 12. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d đi qua G cắt các đoạn thẳng AB, AC. Gọi A', B', C' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC' .

Bài 13. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Vẽ đường thẳng d nằm ngoài tam giác ABC. Gọi A', B', C', G' thứ tự là hình chiếu của A, B, C trên d . Tìm liên hệ giữa các độ dài AA', BB', CC', GG' .

CHUYÊN ĐỀ 5. HÌNH BÌNH HÀNH

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa:

Hình bình hành là tứ giác có các cặp cạnh đối song song.

2. Tính chất: Trong hình bình hành:

- Các cạnh đối bằng nhau.
- Các góc đối bằng nhau.
- Hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có các cạnh đối song song là hình bình hành.
- Tứ giác có các cạnh đối bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai cạnh đối song song và bằng nhau là hình bình hành.
- Tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường là hình bình hành.

II. Bài tập

Dạng 1. Vận dụng tính chất của hình bình hành để chứng minh tính chất hình học

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là trung điểm của AD, F là trung điểm của BC.

- a. Chứng minh $BE = DF$ và $\angle ABE = \angle CDF$.
- b. Chứng minh tứ giác EBF D là hình bình hành.
- c. Chứng minh các đường thẳng EF, DB và AC đồng qui.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD ($AB > BC$). Tia phân giác của góc D cắt AB ở E, tia phân giác của góc B cắt CD ở F.

- a. Chứng minh $DE \parallel BF$.
- b. Tứ giác DEBF là hình gì?

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD. Gọi K, I lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD, M và N là giao điểm của AI và CK với BD.

- a. Chứng minh: $AI \parallel CK$.
- b. Chứng minh: $DM = MN = NB$.

Dạng 2. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình bình hành

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD, đường chéo BD. Kẻ AH vuông góc với BD ở H, CK vuông góc với BD ở K. Chứng minh tứ giác AHCK là hình bình hành.

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Qua điểm O, vẽ đường thẳng a cắt hai đường thẳng AD, BC lần lượt tại E, F, vẽ đường thẳng b cắt hai cạnh AB, CD lần lượt tại K, H. Chứng minh tứ giác EKFH là hình bình hành.

Bài 3. Cho tam giác ABC. Từ một điểm E trên cạnh AC vẽ đường thẳng song song với BC cắt AB tại F và đường thẳng song song với AB cắt BC tại D. Giả sử $AE = BF$.

- a. Chứng minh tam giác AED cân.
- b. Chứng minh AD là phân giác của góc A.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA và I, K là trung điểm các đường chéo AC, BD. Chứng minh:

- a. Các tứ giác MNPQ, INKQ là hình bình hành.
- b. Các đường thẳng MP, NQ, IK đồng qui.

Bài 5. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Các đường thẳng vuông góc với AB tại B, vuông góc với AC tại C cắt nhau ở D.

- a. Chứng minh tứ giác BDCH là hình bình hành.
- b. Tính số đo góc BDC , biết $BAC = 60^\circ$.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD, $AD = 2AB$. Từ C vẽ CE vuông góc với AB. Nối E với trung điểm M của AD. Từ M vẽ MF vuông góc với CE, MF cắt BC tại N.

- a. Tứ giác MNCD là hình gì?
- b. Tam giác EMC là tam giác gì?
- c. Chứng minh: $BAD = 2AEM$.

Bài 7. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F lần lượt là giao điểm của AB và CD, AD và BC; M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AE, EC, CF, FA. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD. Các điểm E, F thuộc đường chéo AC sao cho $AE = EF = FC$. Gọi M là giao điểm của BF và CD; N là giao điểm của DE và AB. Chứng minh rằng:

- a. M, N theo thứ tự là trung điểm của CD, AB.
- b. EMFN là hình bình hành.

Bài 9. Cho hình thang vuông ABCD, có $A = B = 90^\circ$ và $AD = 2BC$. Kẻ AH vuông góc với BD (H thuộc BD). Gọi I là trung điểm của HD. Chứng minh rằng: $CI \perp AI$.

Bài 10. Cho tam giác ABC và O là một điểm thuộc miền trong của tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CA và L, M, N lần lượt là trung

điểm của các đoạn OA, OB, OC. Chứng minh rằng: các đoạn thẳng EL, FM và DN đồng qui.

CHUYÊN ĐỀ 6. ĐỐI XỨNG TRỤC

Bài 1. Cho góc $xOy = 50^0$ và điểm A nằm trong góc đó. Vẽ điểm B đối xứng với A qua Ox, điểm C đối xứng với A qua Oy.

- a. So sánh các độ dài OB và OC.
- b. Tính số đo góc BOC.

Bài 2. Cho tam giác nhọn ABC, trực tâm H. Gọi K là điểm đối xứng với H qua BC.

- a. Chứng minh hai tam giác BHC và BKC bằng nhau.
- b. Cho $BAC = 70^0$. Tính số đo góc BKC.

Bài 3. Cho hình thang vuông ABCD ($A = D = 90^0$). Gọi K là điểm đối xứng với B qua AD, E là giao điểm của CK và AD. Chứng minh $CED = AEB$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I, K lần lượt là điểm đối xứng với điểm H qua các cạnh AB, AC. Chứng minh:

- a. Ba điểm I, A, K thẳng hàng.
- b. Tứ giác BIKC là hình thang.
- c. $IK = 2AH$

Bài 5. Cho tam giác ABC, các phân giác BM và CN cắt nhau tại I. Từ A vẽ các đường vuông góc với BM và CN, chúng cắt BC thứ tự ở E và F. Gọi I' là hình chiếu của I trên BC. Chứng minh rằng E và F đối xứng nhau qua I'.

Bài 6. Cho hai điểm A, B nằm trong một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng d. Tìm điểm $M \in d$ sao cho $MA + MB$ ngắn nhất.

Bài 7. Cho góc $xOy = 60^0$ và điểm A nằm trong góc đó. Gọi B, C lần lượt là hai điểm đối xứng với điểm A qua Ox, Oy.

- a. Chứng minh tam giác BOC là tam giác cân. Tính các góc của tam giác đó.
- b. Tìm điểm $I \in Ox$ và điểm $K \in Oy$ sao cho tam giác AIK có chu vi nhỏ nhất.

Bài 8. Cho tam giác ABC, Cx là phân giác ngoài của góc C. Trên Cx lấy điểm M (khác C). Chứng minh rằng: $MA + MB > CA + CB$.

Cho góc nhọn xOy và điểm A ở trong góc đó. Tìm điểm B ở trên tia Ox và điểm C ở trên tia Oy sao cho chu vi tam giác ABC là nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ 7. ĐỐI XỨNG TÂM

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD. Gọi E là điểm đối xứng với D qua A, F là điểm đối xứng với D qua C. Chứng minh:

- a. $AC \parallel EF$.
- b. Điểm E đối xứng với điểm F qua điểm B.

Bài 2. Cho tam giác ABC, các trung tuyến BD, CE. Gọi H là điểm đối xứng với B qua D, K là điểm đối xứng với C qua E. Chứng minh điểm H đối xứng với điểm K qua điểm A.

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD và điểm E trên cạnh AB, I và K là các trung điểm của cạnh AD và BC. Gọi các điểm M, N lần lượt đối xứng với điểm E qua điểm I và điểm K.

- a. Chứng minh các điểm M, N thuộc đường thẳng CD.
- b. Chứng minh $MN = 2CD$.

Bài 4. Cho góc vuông xOy , điểm A nằm trong góc đó. Gọi B là điểm đối xứng với A qua Ox , C là điểm đối xứng với A qua Oy . Chứng minh B đối xứng với C qua O.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Một đường thẳng đi qua O cắt các cạnh AB và CD theo thứ tự ở M và N. Chứng minh điểm M đối xứng với điểm N qua O.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD có tâm đối xứng là O, một điểm E ở trên đoạn OD. Gọi F là điểm đối xứng của điểm C qua E.

- a. Chứng minh tứ giác ODFA là hình thang.
- b. Xác định vị trí điểm E trên OD để hình thang ODFA là hình bình hành.

Bài 7. Cho tam giác ABC, trọng tâm G. Gọi M, N, P theo thứ tự là các điểm đối xứng của A, B, C qua tâm G.

- a. Chứng minh tứ giác BPNC là hình bình hành.
- b. Chứng minh các tam giác ABC, MNP bằng nhau.
- c. Chứng minh các tam giác ABC, MNP có cùng trọng tâm.

Bài 8. Cho tam giác ABC, H là trực tâm, I là giao điểm các đường trung trực. K là điểm đối xứng với H qua trung điểm của đoạn thẳng BC. Chứng minh K đối xứng với A qua I.

Bài 9. Cho hình bình hành ABCD. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Trên AB lấy điểm E, trên CD lấy điểm F sao cho $AE = CF$.

- a. Chứng minh E đối xứng với F qua O.
- b. Từ E dựng $Ex \parallel AC$ cắt BC tại I, dựng $Fy \parallel AC$ cắt AD tại K. Chứng minh rằng: $EF = FK$; I và K đối xứng với nhau qua O.

Bài 10. Cho tam giác ABC . Gọi A' là điểm đối xứng với A qua C , B' là điểm đối xứng với B qua A , C' là điểm đối xứng với C qua B . Gọi BM là trung tuyến của tam giác ABC , $B'M'$ là trung tuyến của tam giác $A'B'C'$.

- a. Chứng minh rằng $ABM'M$ là hình bình hành.
- b. Gọi G là giao điểm của BM và $B'M'$. Chứng minh rằng G là trọng tâm của hai tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$.

CHUYÊN ĐỀ 7. HÌNH CHỮ NHẬT

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa:

Hình chữ nhật là tứ giác có bốn góc vuông.

2. Tính chất:

Trong hình chữ nhật, hai đường chéo bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

3. Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có ba góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình thang cân có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có một góc vuông là hình chữ nhật.
- Hình bình hành có hai đường chéo bằng nhau là hình chữ nhật.

4. Áp dụng vào tam giác:

- Trong tam giác vuông, đường trung tuyến ứng với cạnh huyền bằng nửa cạnh huyền.
- Nếu một tam giác có đường trung tuyến ứng với một cạnh bằng nửa cạnh ấy thì tam giác đó là tam giác vuông.

II. Bài tập

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình chữ nhật

Bài 1. Cho tam giác ABC , đường cao AH . Gọi I là trung điểm của AC , E là điểm đối xứng với H qua I . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của HC, CE . Các đường thẳng AM, AN cắt HE tại G và K .

- a. Chứng minh tứ giác $AHCE$ là hình chữ nhật.
- b. Chứng minh $HG = GK = KE$.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông tại A . Về phía ngoài tam giác ABC , vẽ hai tam giác vuông cân ADB ($DA = DB$) và ACE ($EA = EC$). Gọi M là trung điểm của BC , I là giao điểm của DM với AB , K là giao điểm của EM với AC . Chứng minh:

- a. Ba điểm D, A, E thẳng hàng.
- b. Tứ giác IAKM là hình chữ nhật.
- c. Tam giác DME là tam giác vuông cân.

Bài 3. Cho hình thang cân ABCD ($AB \parallel CD$, $AB < CD$). Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AD, BD, AC, BC.

- a. Chứng minh bốn điểm M, N, P, Q thẳng hàng.
- b. Chứng minh tứ giác ABPN là hình thang cân.
- c. Tìm một hệ thức liên hệ giữa AB và CD để ABPN là hình chữ nhật.

Bài 4. Cho tam giác ABC. Gọi O là một điểm thuộc miền trong của tam giác, M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các đoạn thẳng OB, OC, AC, AB.

- a. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình bình hành.
- b. Xác định vị trí của điểm O để tứ giác MNPQ là hình chữ nhật.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông cân tại C. Trên các cạnh AC, BC lấy lần lượt các điểm P, Q sao cho $AP = CQ$. Từ điểm P vẽ PM song song với BC ($M \in AB$).

- a. Chứng minh tứ giác PCQM là hình chữ nhật.
- b. Gọi I là trung điểm của PQ. Chứng minh rằng khi P di chuyển trên cạnh AC, Q di chuyển trên cạnh BC thì điểm I di chuyển trên một đoạn thẳng cố định.

Bài 6. Cho hình chữ nhật ABCD. Nối C với một điểm E bất kỳ trên đường chéo BD. Trên tia đối của tia EC lấy điểm F sao cho $EF = EC$. Vẽ FH và FK lần lượt vuông góc với AB và AD. Chứng minh rằng:

- a. Tứ giác AHFK là hình chữ nhật.
- b. AF song song với BD và KH song song với AC.
- c. Ba điểm E, H, K thẳng hàng.

Bài 7. Cho tam giác ABC và H là trực tâm. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC và CA; D, E, F lần lượt là trung điểm các đoạn HA, HB và HC.

- a. Chứng minh rằng các tứ giác MNFD và MEFP là các hình chữ nhật.
- b. Để các đoạn MD, ME và DP bằng nhau thì tam giác ABC phải là tam giác gì?

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình chữ nhật để giải toán

Bài 1. Tính độ dài trung tuyến ứng với cạnh huyền của một tam giác vuông có các cạnh góc vuông bằng 7cm và 24cm.

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, CH là đường cao ($H \in AB$). Gọi D là điểm đối xứng với điểm B qua A.

- a. Chứng minh tam giác DCB là tam giác vuông.
- b. Chứng minh $DCA = HCB$.

Bài 3. Cho hình chữ nhật ABCD. Vẽ $BH \perp AC$ ($H \in AC$). Gọi M, K lần lượt là trung điểm của AH và DC; I, O lần lượt là trung điểm của AB và IC.

a. Chứng minh $IC = KB$ và $MO = \frac{1}{2}IC$.

b. Tính số đo góc BMK .

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A. M là điểm bất kì thuộc cạnh BC. Vẽ $MD \perp AB$, $ME \perp AC$. O là trung điểm của DE.

a. Chứng minh ba điểm A, O, M thẳng hàng.

b. Khi điểm M di chuyển trên cạnh BC thì điểm O di chuyển trên đường nào?

c. Điểm M ở vị trí nào trên cạnh BC thì AM có độ dài ngắn nhất.

Bài 5. Cho hình chữ nhật ABCD, $AB = 2AD$. Vẽ tia AM (M thuộc cạnh DC) sao cho $\angle DAM = 15^\circ$. Chứng minh tam giác ABM là tam giác cân.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AC > AB$. AH là đường cao. Trên tia HC lấy $HD = HA$, đường vuông góc với BC tại D cắt AC ở E.

a. Chứng minh $AE = AB$.

b. Gọi M trung điểm BE. Tính số đo góc AHM .

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và $AC = 3AB$. Trên cạnh góc vuông AC lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$. Tính $\angle ACB + \angle AEB$.

Bài 8. Cho hình chữ nhật ABCD. Kẻ $AH \perp BD$. Gọi I là trung điểm của DH. Kẻ đường thẳng vuông góc với AI tại I cắt cạnh BC ở K. Chứng minh K là trung điểm cạnh BC.

CHUYÊN ĐỀ 8. HÌNH THOI

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa:

Hình thoi là một tứ giác có bốn cạnh bằng nhau.

2. Tính chất: Trong hình thoi:

- Hai đường chéo vuông góc với nhau.
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi.
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

hình thoi.

II. Bài tập

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình thoi

Bài 1. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, AD. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

Bài 2. Cho tứ giác ABCD có $C = 40^\circ$, $D = 80^\circ$, $AD = BC$. Gọi E, F, M, N lần lượt là trung điểm của AB, DC, DB, AC.

a. Chứng minh tứ giác EMFN là hình thoi.

b. Tính góc MFN .

Bài 3. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo AC và BD. Gọi E, F, G, H lần lượt là các giao điểm của các phân giác trong của các tam giác OAB, OBC, ODC, ODA.

a. Chứng minh: ba điểm E, O, G thẳng hàng, ba điểm H, O, F thẳng hàng.

b. Chứng minh các tam giác AEB và CGD bằng nhau.

c. Chứng minh tứ giác EFGH là hình thoi.

Bài 4. Cho tam giác ABC và một điểm M thuộc cạnh BC. Qua M vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AC ở E và đường thẳng song song với AC, cắt AB ở F.

a. Chứng minh tứ giác AFME là hình bình hành.

b. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình thoi.

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$, $D = 70^\circ$. Vẽ $BH \perp AD$ ($H \in AD$). Gọi M, N lần lượt là trung điểm cạnh CD, AB.

a. Chứng minh tứ giác ANMD là hình thoi.

b. Tính góc HMC .

Bài 6. Cho tam giác đều ABC. Gọi H là trực tâm của tam giác, AD là đường cao. Trên cạnh BC lấy điểm M. Từ M vẽ $ME \perp AB$ ($E \in AB$) và $MF \perp AC$ ($F \in AC$). Gọi I là trung điểm của AM.

a. Chứng minh tứ giác DEIF là hình thoi.

b. Chứng minh các đường thẳng MH, ID, EF đồng qui.

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD, hai đường chéo cắt nhau ở O. Hai đường thẳng d_1 và d_2 cùng đi qua O và vuông góc với nhau. Đường thẳng d_1 cắt các cạnh AB và CD ở M và P. Đường thẳng d_2 cắt các cạnh BC và AD ở N và Q. Chứng minh tứ giác MNPQ là hình thoi.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình thoi để giải toán

Bài 1. Cho hình thoi ABCD có $AC = 8\text{cm}$, $BD = 10\text{cm}$. Tính độ dài của cạnh hình thoi.

Bài 2. Cho hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Trên các cạnh AB, AC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = CN$. Chứng minh tam giác MDN là tam giác đều.

Bài 3. Cho hình thoi ABCD có $A = 60^0$. Trên AD và CD lấy các điểm M, N sao cho $AM + CN = AD$. Gọi P là điểm đối xứng của N qua BC, MP cắt BC tại Q. Tứ giác MDCQ là hình gì ?

Bài 4. Cho P là một điểm chuyển động trong tam giác ABC sao cho $PBA = PCA$. Hạ $PM \perp AB$; $PN \perp AC$ ($M \in AB$; $N \in AC$). Gọi K, S là hai đỉnh khác của hình thoi KMSN. Chứng minh KS đi qua một điểm cố định.

CHUYÊN ĐỀ 9. HÌNH VUÔNG

I. Lý thuyết

1. Định nghĩa:

Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau.

2. Tính chất:

Hình vuông có tất cả các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình vuông.
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông.
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông.
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.
- Một tứ giác vừa là hình chữ nhật, vừa là hình thoi thì tứ giác đó là hình vuông.

II. Bài tập

Dạng 1. Vận dụng dấu hiệu nhận biết để chứng minh một tứ giác là hình vuông

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A. Phân giác trong AD của góc A ($D \in BC$). Vẽ $DF \perp AC$, $DE \perp AB$. Chứng minh tứ giác AEDF là hình vuông.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Trên các cạnh AB, BC, CD, DA lần lượt lấy các điểm E, F, G, H sao cho $AE = BF = CG = DH$. Chứng minh tứ giác EFGH là hình vuông.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A, M là một điểm thuộc cạnh BC. Qua M vẽ các đường thẳng song song với AB và AC, chúng cắt các cạnh AB, AC theo thứ tự tại E và F.

- a. Tứ giác AFME là hình gì?
- b. Xác định vị trí điểm M trên cạnh BC để tứ giác AFME là hình vuông.

Bài 4. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE.

- Tứ giác ADFE là hình gì?
- Tứ giác EMFN là hình gì?

Bài 5. Cho tam giác ABC. Dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABCD và ACEF. Gọi Q, N lần lượt là giao điểm các đường chéo của ABCD và ACEF; M, P lần lượt là trung điểm BC và DF. Chứng minh rằng tứ giác MNPQ là hình vuông.

Dạng 2. Vận dụng kiến thức hình vuông để giải toán

Bài 1. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh các AD, DC lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $AE = DF$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của EF, BF.

- Chứng minh các tam giác ADF và BAE bằng nhau.
- Chứng minh MN vuông góc với AF.

Bài 2. Cho hình vuông ABCD. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E, trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$.

- Chứng minh tam giác EDF vuông cân.
- Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh $BI = DI$.
- Gọi O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Chứng minh O, C, I thẳng hàng.

Bài 3. Cho tam giác ABC, dựng ra phía ngoài tam giác các hình vuông ABCD và ACEF. Vẽ đường cao AH kéo dài HA gặp DF tại E. Chứng minh rằng $DI = IF$.

Bài 4. Cho hình bình hành ABCD. Vẽ về phía ngoài hình bình hành, hai hình vuông ABEF và ADGH. Chứng minh:

- $AC = FH$ và $AC \perp FH$.
- Tam giác CEG là tam giác vuông cân.

Bài 5. Cho đoạn thẳng AB và điểm M thuộc đoạn thẳng đó. Vẽ về một phía của AB, các hình vuông AMCD, BMEF.

- Chứng minh AE vuông góc với BC.
- Gọi H là giao điểm của AE và BC. Chứng minh ba điểm D, H, F thẳng hàng.
- Chứng minh đường thẳng DF luôn đi qua một điểm cố định khi M di chuyển trên đoạn thẳng cố định AB.

Bài 6. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh CD lấy điểm M. Tia phân giác của góc ABM cắt AD ở I. Chứng minh rằng: $BI \leq 2MI$.

Bài 7. Cho hình vuông ABCD. Lấy điểm E thuộc đường chéo AC. Kẻ $EF \perp AD$, $EG \perp CD$.

- Chứng minh rằng: $EB = FG$ và $EB \perp FG$.

b. Chứng minh rằng: Các đường thẳng BE, AG, CF đồng qui.

Bài 8. Cho tam giác ABC. Vẽ ra phía ngoài tam giác ABC, các hình vuông ABDE và ACFG. Vẽ hình bình hành EAGH. Chứng minh rằng:

- $AK = BC$ và $AH \perp BC$.
- Các đường thẳng KA, BF, CD đồng qui.

Bài tập tổng hợp

Bài 1. Cho tứ giác ABCD. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Các đường chéo AC, BD của tứ giác ABCD thoả điều kiện gì thì tứ giác EFGH là:

- Hình chữ nhật. *ĐS: $AC \perp BD$.*
- Hình thoi. *ĐS: $AC = BD$.*
- Hình vuông. *ĐS: $AC = BD$ và $AC \perp BD$.*

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A, trung tuyến AM. Gọi I là trung điểm của AC, K là điểm đối xứng của điểm M qua điểm I.

- Tứ giác AMCK là hình gì?
- Tứ giác AKMB là hình gì?
- Có trường hợp nào của tam giác ABC để tứ giác AKMB là hình thoi.
ĐS: a) AMCK là hình chữ nhật b) AKMB là hình bình hành c) Không.

Bài 3. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài tam giác, vẽ các hình vuông ABDE, ACGH.

- Chứng minh tứ giác BCHE là hình thang cân.
- Vẽ đường cao AK của tam giác ABC. Chứng minh AK, DE, GH đồng qui.

Bài 4. Cho hình thang cân ABCD với $AB \parallel CD$. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA.

- Tứ giác MNPQ là hình gì?
- Cho biết diện tích tứ giác ABCD bằng 30cm^2 . Tính diện tích tứ giác MNPQ.
ĐS: a) MNPQ là hình thoi b) $S_{MNPQ} = 15\text{cm}^2$.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, trung tuyến AM. Gọi D là trung điểm của AB, E là điểm đối xứng của điểm M qua điểm D.

- Chứng minh điểm E đối xứng với điểm M qua đường thẳng AB.
- Các tứ giác AEMC, AEBM là hình gì?
- Cho $BC = 4\text{cm}$. Tính chu vi tứ giác AEBM.
- Tam giác vuông thoả điều kiện gì thì AEBM là hình vuông.

ĐS: b) AEMC là hình bình hành, AEBM là hình thoi c) $P_{AEBM} = 8cm$ d)

ΔABC vuông cân.

Bài 6. Cho hình bình hành ABCD, O là giao điểm hai đường chéo. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, BC. Các đường thẳng BM, DN cắt đường chéo AC tại P, Q.

- Chứng minh $AP = PQ = QC$.
- Tứ giác MPNQ là hình gì?
- Xác định tỉ số $\frac{CA}{CD}$ để MPNQ là hình chữ nhật.
- Xác định góc ACD để MPNQ là hình thoi.
- Tam giác ACD thoả mãn điều kiện gì để MPNQ là hình vuông.

ĐS: b) MPNQ là hình bình hành c) $\frac{CA}{CD} = 3$

d) $ACD = 90^0$ e) ΔACD vuông tại C và $CA = 3CD$.

Bài 7. Cho hình thoi ABCD, O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ đường thẳng qua B song song với AC, đường thẳng qua C song song với BD, hai đường thẳng đó cắt nhau ở K.

- Tứ giác OBKC là hình gì?
- Chứng minh $AB = OK$.
- Tìm điều kiện của hình thoi ABCD để OBKC là hình vuông.

ĐS: a) OBKC là hình chữ nhật c) ABCD là hình vuông.

Bài 8. Cho hình bình hành ABCD có $BC = 2AB$ và $A = 60^0$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

- Tứ giác ECDF là hình gì?
- Tứ giác ABED là hình gì?
- Tính số đo của góc AED.

ĐS: a) ECDF là hình thoi b) ABED là hình thang cân c) $AED = 90^0$.

Bài 9. Cho hình thang ABCD ($AB \parallel CD$). Gọi E, F theo thứ tự là trung điểm của AB, CD. Gọi O là trung điểm của EF. Qua O vẽ đường thẳng song song với AB, cắt AD và BC theo thứ tự tại M và N.

- Tứ giác EMFN là hình gì?
- Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì để EMFN là hình thoi.
- Hình thang ABCD có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông.

*ĐS: a) EMFN là hình bình hành b) ABCD là hình thang cân
c) ABCD là hình thang cân và có hai đường chéo vuông góc.*

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A với $AB = AC = a$.

- Lấy điểm D trên cạnh AC và điểm E trên cạnh AB sao cho $AD = AE$. Các đường thẳng vuông góc với EC vẽ từ A và D lần lượt cắt cạnh BC ở K và L. Chứng minh $BK = KL$.
- Một hình chữ nhật APMN thay đổi có đỉnh P trên cạnh AB, đỉnh N trên cạnh AC và có chu vi luôn bằng $2a$. Điểm M di chuyển trên đường nào?
- Chứng minh khi hình chữ nhật APMN thay đổi thì đường vuông góc vẽ từ M xuống đường chéo PN luôn đi qua một điểm cố định.

ĐS: b) M di chuyển trên cạnh BC c) HM đi qua điểm I cố định (với ACIB là hình vuông).

Bài 11. Cho hình vuông ABCD. E là điểm trên cạnh DC, F là điểm trên tia đối của tia BC sao cho $BF = DE$.

- Chứng minh tam giác AEF vuông cân.
- Gọi I là trung điểm của EF. Chứng minh I thuộc BD.
- Lấy điểm K đối xứng với A qua I. Chứng minh tứ giác AEKF là hình vuông.

Bài 12. Cho hình bình hành ABCD có $AD = 2AB$, $A = 60^\circ$. Gọi E và F lần lượt là trung điểm của BC và AD.

- Chứng minh $AE \perp BF$.
- Chứng minh tứ giác BFDC là hình thang cân.
- Lấy điểm M đối xứng của A qua B. Chứng minh tứ giác BMCD là hình chữ nhật.
- Chứng minh ba điểm M, E, D thẳng hàng.

Bài 13. Cho tam giác ABC vuông tại A có $BAC = 60^\circ$. Kẻ tia Ax song song với BC. Trên Ax lấy điểm D sao cho $AD = DC$.

- Tính số đo các góc BAD , DAC .
- Chứng minh tứ giác ABCD là hình thang cân.
- Gọi E là trung điểm của BC. Chứng minh tứ giác ADEB là hình thoi.

Bài 14. Cho ABCD là hình bình hành. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, BC, CD, DA. Gọi K là giao điểm của AC và DM, L là trung điểm của BD và CM.

- Tứ giác MNPQ là hình gì?
- Tứ giác MDPB là hình gì?
- Chứng minh: $AK = KL = LC$.

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD có $AB = 2AD$. Gọi E, F thứ tự là trung điểm của AB và CD.

- Các tứ giác AEFD, AEFC là hình gì?

- b. Gọi M là giao điểm của AF và DE, N là giao điểm của BF và CE. Chứng minh rằng tứ giác EMFN là hình chữ nhật.
- c. Hình bình hành ABCD nói trên có thêm điều kiện gì để EMFN là hình vuông?

Bài 16. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM. Gọi H là điểm đối xứng với M qua AB, E là giao điểm của MH và AB. Gọi K là điểm đối xứng với M qua AC, F là giao điểm của MK và AC.

- a. Xác định dạng của tứ giác AEMF, AMBH, AMCK.
- b. Chứng minh rằng H đối xứng với K qua A.
- c. Tam giác vuông ABC có thêm điều kiện gì thì AEMF là hình vuông?

CHUYÊN ĐỀ 10. TAM GIÁC ĐỒNG DẠNG - ĐỊNH LÝ TA LÉT

I. Lý thuyết

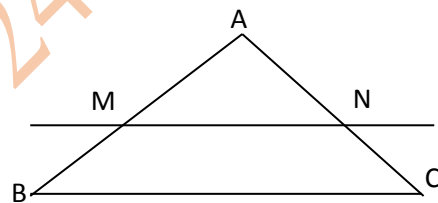
1. Định lý Talet trong tam giác

Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.

$$MN \parallel BC$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$



2. Khái niệm tam giác đồng dạng

Tam giác A'B'C' gọi là đồng dạng với tam giác ABC nếu:

$$A' = A ; B' = B ; C' = C$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

3. Các trường hợp đồng dạng của tam giác

a) Trường hợp thứ nhất (ccc):

Nếu 3 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 3 cạnh của tam giác kia thì 2 tam giác đó đồng dạng.

b) Trường hợp thứ 2(cgc):

Nếu 2 cạnh của tam giác này tỷ lệ với 2 cạnh của tam giác kia và 2 góc tạo bởi tạo các cặp cạnh đó bằng nhau thì hai tam đó góc đồng dạng.

c) Trường hợp thứ 3(gg):

Nếu 2 góc của tam giác này lần lượt bằng 2 góc của tam giác kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

d) Các trường hợp đồng dạng của tam giác vuông.

- Tam giác vuông này có một góc nhọn bằng góc nhọn của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Tam giác vuông này có hai cạnh góc vuông tỷ lệ với hai cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.
- Nếu cạnh huyền và một cạnh của tam giác vuông này tỷ lệ với cạnh huyền và cạnh góc vuông của tam giác vuông kia thì hai tam giác đó đồng dạng.

II. Bài tập

Bài 1. Cho hình bình hành ABCD với đường chéo $AC > BD$. Gọi E và F lần lượt là chân đường vuông góc kẻ từ C đến các đường thẳng AB và AD; gọi G là chân đường vuông góc kẻ từ B đến AC.

- a. Chứng minh rằng 2 tam giác CBG và ACF đồng dạng
- b. Chứng minh rằng : $AB.AE + AD.AF = AC^2$

Bài 2. Cho hình vuông ABCD có độ dài cạnh là a. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của AB và BC . Các đường thẳng DN và CM cắt nhau tại I . Chứng minh rằng :

- a. Tam giác CIN vuông
- b. Tính diện tích tam giác CIN theo a.
- c. Tam giác AID cân.

Bài 3. Cho hình thang ABCD ($BC // AD$) với $\angle ABC = \angle ACD$. Tính độ dài đường chéo AC, biết rằng 2 đáy BC và AD theo thứ tự có độ dài 12m, 27m.

Bài 4. Cho tam giác ABC , M là Trung điểm của cạnh BC. Từ 1 điểm E trên cạnh BC ta kẻ $Ex // AM$. Ex cắt tia CA ở F và tia BA ở G. Chứng minh rằng: $FE + EG = 2 AM$

Bài 5. Cho hình bình hành ABCD, trên đường chéo AC lấy I. Tia DI cắt đường thẳng AB tại M, cắt đường thẳng BC tại N.

- a. Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN} = \frac{CB}{CN}$
- b. Chứng minh rằng $ID^2 = IM.IN$

Bài 6. Cho tam giác ABC, đường phân giác trong của C cắt cạnh AB tại D. Chứng minh rằng $CD^2 < CA.CB$

Bài 7. Cho tam giác ABC, BD và CE là 2 đường cao của tam giác ABC. DF và EG là 2 đường cao của tam giác ADE. Chứng minh rằng:

- a. Hai tam giác ADE và ABC đồng dạng
- b. $FG // BC$

Bài 8. Cho tam giác ABC ($AB < AC$). Hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H.

- a. So sánh BAH và CAH
- b. So sánh 2 đoạn thẳng BD và CE

c. Chứng minh rằng 2 tam giác ADE và tam giác ABC đồng dạng

Bài 9. Cho hình thang ABCD có đáy lớn là CD. Qua A kẻ đường thẳng song song với BC cắt đường chéo BD tại M và cắt CD tại I. Qua B kẻ đường thẳng song song với AD cắt cạnh CD ở K. Qua K kẻ đường thẳng song song với BD cắt BC ở P. Chứng minh rằng $MP \parallel DC$.

Bài 10. Trong tam giác ABC kẻ trung tuyến AM. K là 1 điểm trên AM sao cho: $\frac{AK}{AM} = \frac{1}{3}$, BK cắt AC tại N.

a. Tính diện tích tam giác AKN, biết diện tích tam giác ABC là S.

b. Một đường thẳng qua K cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại I và J.

Chứng minh rằng $\frac{AB}{AI} + \frac{AC}{AJ} = 6$.

Bài 11. Lấy 1 điểm O trong tam giác ABC. Các tia AO, BO, CO cắt BC, AC, AB lần lượt tại P, Q, R. Chứng minh rằng: $\frac{OA}{AP} + \frac{OB}{BQ} + \frac{OC}{CR} = 2$

Bài 12. Cho đoạn thẳng AB, gọi O là trung điểm của AB. Vẽ về 1 phía AB, các tia Ax và By vuông góc với AB. Lấy C trên Ax, D trên By sao cho góc COD = 90°.

a. Chứng minh rằng tam giác ACO đồng dạng với tam giác BDO.

b. Chứng minh rằng $CD = AC + BD$.

c. Kẻ OM vuông góc CD tại M, gọi N là giao điểm của AD với BC. Chứng minh rằng $MN \parallel AC$

Bài 13. Cho tam giác ABC với $AB = 5$ cm, $AC = 6$ cm, $BC = 7$. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, O là giao điểm của 2 tia phân giác trong của tam giác ABC. Chứng minh rằng $GO \parallel AC$.

Bài 14. Cho hình vuông ABCD trên cạnh BC lấy điểm M sao cho $BM = \frac{BC}{3}$, trên tia đối của tia CD lấy N sao cho $CN = \frac{AD}{2}$. I là giao điểm của tia AM và BN. Chứng minh rằng 5 điểm A, B, I, C, D cùng cách đều 1 điểm.

Bài 15. Cho tam giác ABC, trung tuyến CM. Qua điểm Q trên AB vẽ đường thẳng d song song với CM, đường thẳng d cắt BC tại R và cắt AC tại P. Chứng minh nếu $QA \cdot QB = QP \cdot QR$ thì tam giác ABC vuông tại C.

Bài 16. Trên các cạnh AB, BC, CA của ΔABC cố định lấy M, N, P sao cho: $\frac{AM}{MB} = \frac{BN}{NC} =$

$\frac{CP}{PA} = k$ ($k > 0$).

a. Tính $S_{\Delta MNP}$ theo $S_{\Delta ABC}$ và theo k

b. Tính k sao cho $S_{\Delta MNP}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

Bài 17. Cho tam giác ABC ($AB=AC$) có góc ở đỉnh bằng 20^0 ; cạnh đáy là a; cạnh bên là b. Chứng minh rằng $a^3 + b^3 = 3ab^2$

Bài 18. Cho 4 điểm A,E,F,B theo thứ tự ấy trên 1 đường thẳng. Trên cùng 1 nửa mặt phẳng bờ AB vẽ các hình vuông ABCD; FGHE.

a. Gọi O là giao điểm của AG và BH. Chứng minh rằng các tam giác OHE và OBC đồng dạng.

b. Chứng minh rằng các đường thẳng CE và FD cùng đi qua O.

Bài 19. Cho tam giác ABC có $AB = 4, BC = 6, CA = 8$. Các đường phân giác trong AD và BE cắt nhau tại I.

a. Tính độ dài các đoạn thẳng BD và CD.

b. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Chứng minh rằng $IG \parallel BC$ suy ra độ dài IG

Bài 20. Cho ΔABC có $\hat{A} = 30^0$. Dựng bên ngoài ΔABC đều.

Chứng minh $AD^2 = AB^2 + AC^2$.

Bài 21. Cho hình vuông ABCD, trên BC lấy M sao cho: $BM = \frac{1}{3}BC$. Trên tia đối của

tia CD lấy điểm N sao cho $CN = \frac{1}{2}BC$. Cạnh AM cắt BN tại I và CI cắt AB tại K. Gọi

H là hình chiếu của M trên AC. Chứng minh rằng K,M,H thẳng hàng.

Bài 22. Cho hình thang ABCD có 2 đáy là $AB = 2a; CD = a$. Hãy xác định vị trí điểm M trên đường thẳng CD sao cho đường thẳng AM chia hình thang thành 2 phần có diện tích bằng nhau.

Bài 23. Cho tam giác ABC ($BC < AB$). Từ C vẽ đường vuông góc với phân giác BE tại F và cắt AB tại K; vẽ trung tuyến BD cắt CK tại G. Chứng minh rằng DF đi qua trung điểm của GE.

Bài 24. Cho hình thoi ABCD có góc $A = 60^0$. Gọi M là 1 điểm thuộc cạnh AD. Đường thẳng CM cắt đường thẳng AB tại N.

a. Chứng minh $AB^2 = DM.BN$

b. BM cắt DN tại P. Tính $\angle BPD$

Bài 25. Cho ΔABC , điểm M nằm trên cạnh BC. Chứng minh:

$$MA \cdot BC < MC \cdot AB + MB \cdot AC.$$

Bài 26. Cho tam giác ABC cân tại A ($A < 90^0$). Từ B kẻ BM vuông góc với AC.

Chứng minh rằng: $\frac{AM}{AC} = 2\left(\frac{AB}{BC}\right)^2 - 1$.

Bài 27. Cho hình bình hành ABCD tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BO, AO. Lấy điểm F trên cạnh AB sao cho tia FM cắt cạnh BC tại E và tia FN cắt cạnh AD tại K. Chứng minh rằng:

a. $\frac{BA}{BF} + \frac{BC}{BE} = 4$

b. $BE + AK \geq BC$

Bài 28. Cho tam giác ABC ($AB = BC$). Trên cạnh AC chọn điểm K nằm giữa A và C. Trên tia đối của tia CA lấy E sao cho: $CE = AK$. Chứng minh: $BK + BE > BA + BC$

Bài 29. Cho tam giác ABC đều. Gọi M là 1 điểm bất kỳ nằm trong tam giác. Chứng minh rằng tổng các khoảng cách từ M đến 3 cạnh của tam giác có giá trị không đổi khi M thay đổi vị trí trong tam giác.

Bài 30. Cho tam giác ABC, qua 1 điểm O tùy ý trong tam giác, kẻ các đường AO, BO, CO cắt BC, CN, AB lần lượt tại M, N và P. Chứng minh rằng: $\frac{OM}{AM} + \frac{ON}{BN} + \frac{OP}{CP} = 1$

Bài 31. Cho ΔABC có 2 đường cao BD và CE. Chứng minh: $\angle AED = \angle ACB$

Bài 32. Cho ΔABC có 2 đường phân giác AD. Chứng minh: $AD^2 = AB.AC - DB.DC$

Bài 33. Cho tam giác ABC ($A < 90^\circ$). Bên ngoài tam giác dựng các hình vuông ABDE, ACFG. Dựng hình bình hành AEIG. Chứng minh rằng:

a. $\Delta ABC = \Delta GIA$ và $CI = BF$

b. Ba đường thẳng AI, BF, CD đồng quy

Bài 34. Cho tam giác ABC, gọi D là trung điểm AB. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $AE = 2EC$. Gọi O là giao điểm của CD và BE. Chứng minh rằng:

a. $S_{\Delta BOC} = S_{\Delta AOC}$

b. $BO = 3EO$

Bài 35. Cho tam giác ABC. Một đường thẳng song song với BC cắt AC tại E và cắt đường thẳng song song với AB kẻ từ C ở F. Gọi S là giao điểm của AC và BF. Chứng minh rằng $SC^2 = SE.SA$

Bài 36. Cho hình bình hành ABCD. Trên cạnh AB và CD lần lượt lấy các điểm M và K sao cho $AM = CK$. Trên AD lấy điểm P tùy ý. Đoạn thẳng MK lần lượt cắt PB và PC tại E và F. Chứng minh rằng $S_{FEP} = S_{BME} + S_{CKF}$

Bài 37. Cho đoạn thẳng $AC = m$. Lấy điểm B bất kỳ thuộc đoạn AC. Tia Bx \perp AC. Trên tia Bx lần lượt lấy các điểm D và E sao cho $BD = BA$ và $BE = BC$.

a. Chứng minh rằng $CD = AE$ và $CD \perp AE$.

b. Gọi M, N lần lượt là Trung điểm của AE, CD. Gọi I là Trung điểm của MN. Chứng minh rằng khoảng cách từ điểm I đến AC không đổi khi B di chuyển trên đoạn AC.

- c. Tìm vị trí của điểm B trên đoạn AC sao cho tổng diện tích 2 tam giác ABE và BCD có giá trị lớn nhất. Tìm giá trị lớn nhất này theo m

Bài 38. Cho hình vuông ABCD. Trên cạnh AB lấy M. Vẽ BH vuông góc với CM. Nối DH. Vẽ HN \perp DH. Chứng minh :

- ΔDHC đồng dạng với ΔNHB
- $AM \cdot NB = NC \cdot MB$

Bài 39. Cho hình bình hành ABCD. Gọi M, N là trung điểm của BC, AD. Gọi K là điểm nằm giữa C và D. Gọi P, Q theo thứ tự là các điểm đối xứng của K qua tâm M và N.

- Chứng minh rằng Q, P, A, B thẳng hàng
- Gọi G là giao điểm của PN và QM. Chứng minh rằng GK luôn đi qua điểm I cố định khi K thay đổi trên đoạn CD.

Bài 40. Cho tam giác ABC vuông tại A. Về phía ngoài của tam giác ta vẽ các hình vuông ABDE và ACGH.

- Chứng minh rằng BCHE là hình thang cân.
- Kẻ đường cao AK của tam giác ABC. CMR: các đường thẳng AK, DE, GH đồng quy.

Bài 41. Cho tứ giác ABCD. Đường thẳng qua A song song với BC, cắt BD tại P và đường thẳng qua B song song với AD cắt AC tại Q. Chứng minh $PQ \parallel CD$.

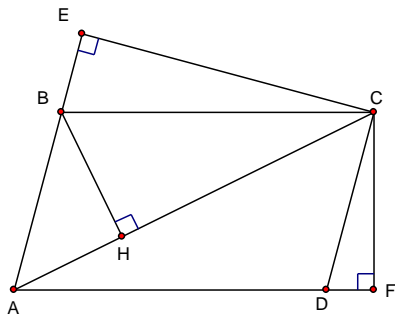
Bài 42. Cho tam giác ABC. Trên cạnh BC, CN lần lượt lấy các điểm M, N, P, lần lượt đặt diện tích các tam giác ANP, MBP, MNC, ABC là S_1, S_2, S_3, S .

- Chứng minh: $\frac{S_1}{S} = \frac{AN \cdot AP}{AC \cdot AB}$
- Chứng minh: $S_1 \cdot S_2 \cdot S_3 \leq \frac{1}{64} S^3$

Bài 43. Cho tứ giác ABCD có $AC = 10$ cm, $BD = 12$. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại O, biết $\angle AOB = 30^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD

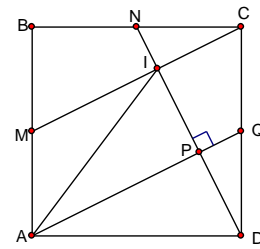
Gợi ý đáp án

Bài 1.



HD: $AB.AE = AC.AH$
 $BC.AF = AC.CH$

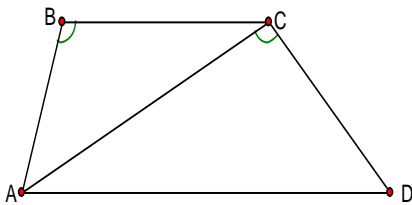
Bài 2.



HD:

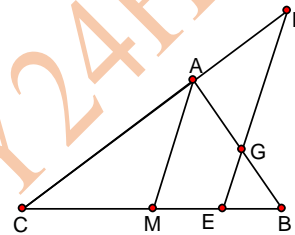
- b. Tỉ số diện tích 2 Δ đồng dạng bằng tỉ số bình phương 2 cạnh tương ứng.
- c. Q là trung điểm CD \Rightarrow PQ \perp DN

Bài 3.



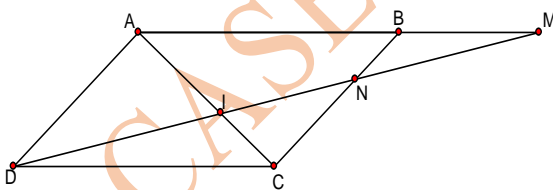
HD: $\Delta ABC \sim \Delta DCA$

Bài 4.



HD: $\frac{EF}{AM} = \frac{EC}{CM}; \frac{EG}{AM} = \frac{BE}{CM}$

Bài 5.



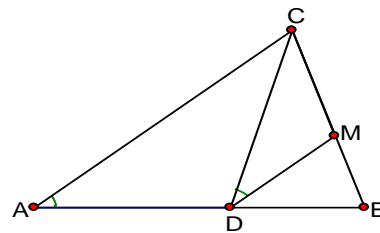
HD:

a. $\frac{MN}{ND} = \frac{BN}{NC} \Rightarrow \frac{MD}{ND} = \frac{CB}{CN};$

$\frac{AM}{AB} = \frac{DM}{DN};$

b. $\frac{ID}{IN} = \frac{IA}{IC}; \frac{IM}{ID} = \frac{IA}{IC}$

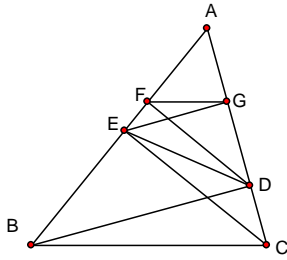
Bài 6.



HD: $CD^2 = CA.CM.$

Bài 7.

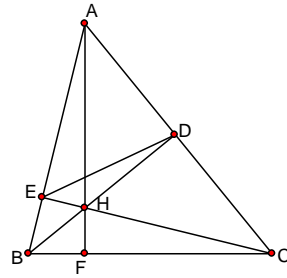
Bài 8.



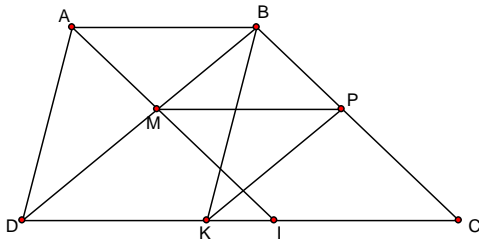
HD:

a. $\frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$

b. $\triangle AFG \sim \triangle ABC$

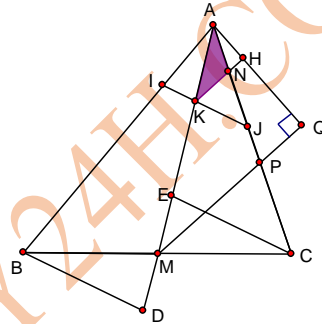


Bài 9.



HD: $DI = CK; \frac{BM}{MD} = \frac{AB}{DI}, \frac{PB}{PC} = \frac{MB}{MD}$

Bài 10.



HD:

Bài 1. P là trung điểm AC;

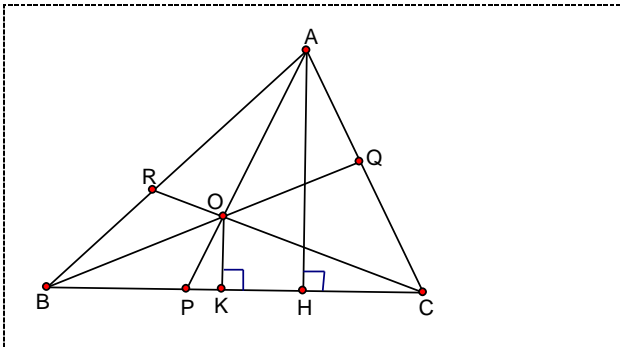
$\frac{S_{AKN}}{S_{AMP}} = \frac{1}{9}, \frac{S_{AMP}}{S_{AMC}} = \frac{3}{5}$

Bài 2. Kẻ $BD \parallel CE \parallel IJ; AE + ED = 2AM$

$\frac{AB}{AI} = \frac{AD}{AK}, \frac{AC}{AJ} = \frac{AE}{AK}$

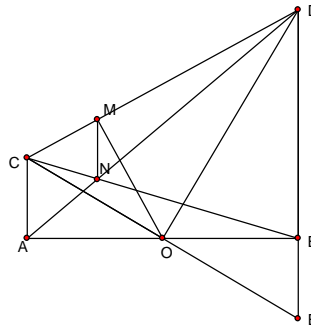
Bài 11.

Bài 12.



HD: Đặt $S_{OBC} = S_1$; $S_{OAC} = S_2$; $S_{OAB} = S_3$;
 $S_{ABC} = S$

$$\frac{OA}{AP} = \frac{S_2 + S_3}{S}; \quad \frac{OB}{BQ} = \frac{S_1 + S_3}{S}; \quad \frac{OC}{CR} = \frac{S_1 + S_2}{S}$$

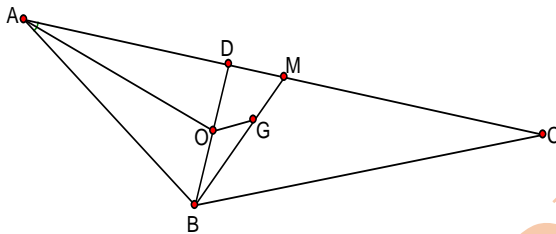


HD:

b. Kẻ CO cắt DB tại E. ΔDCE cân.

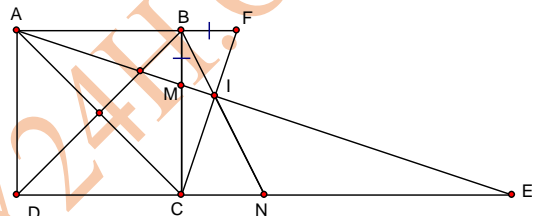
$$\frac{AN}{ND} = \frac{CM}{MD}$$

Bài 13.



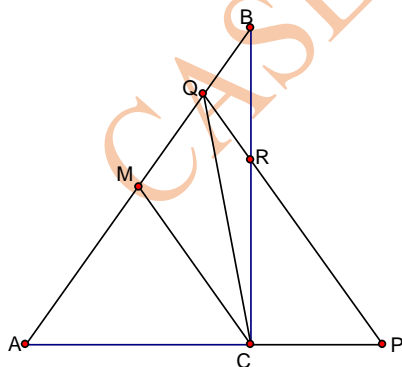
HD: $\frac{OD}{OB} = \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$

Bài 14.



HD: $NE = \frac{3}{2}AB$; $BF = BM = \frac{1}{3}AB \Rightarrow \Delta AIC$ vuông tại I

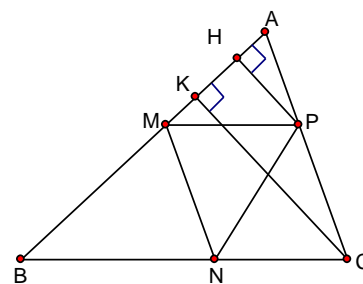
Bài 15.



HD: $QA \cdot QB = QP \cdot QR$

$$\Rightarrow \frac{QA}{QP} = \dots = \dots = \frac{QP}{QA}$$

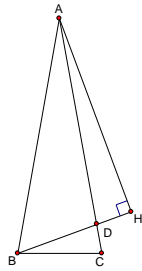
Bài 16.



$$(k + 1)^2 \geq 4k \text{ (Co-si)}$$

Bài 17.

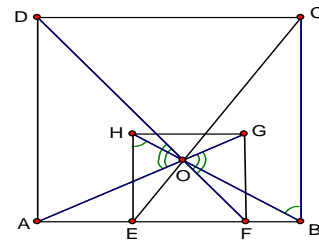
Bài 18.



$HD:AH^2 = \frac{3b^2}{4}; \Delta ABC \sim \Delta BCD;$

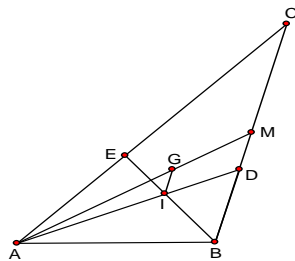
$AD = b - \frac{a^2}{b}$

Mà $AD^2 = AH^2 + DH^2 = b^2 - ab + a^2$



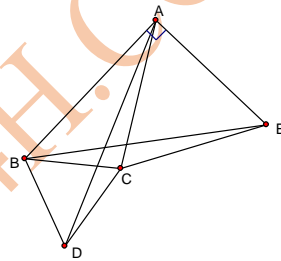
HD: a. $\frac{OH}{OB} = \frac{HE}{CB};$

Bài 19.



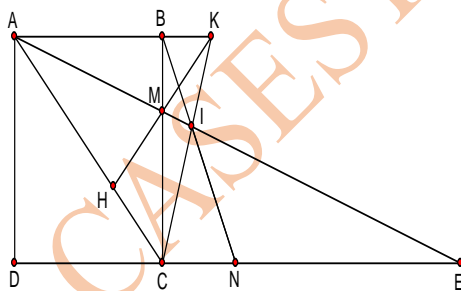
HD: b. $\frac{ID}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow IG = \frac{2}{3}$

Bài 20.



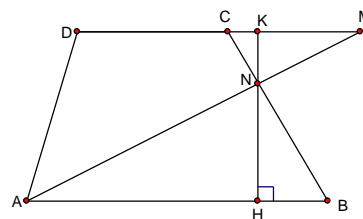
HD: Dựng Δ đều ACE; $AD = BE$

Bài 21.



M là trực tâm ΔACK

Bài 22.



HD: $HK = h; HN = x,$

$S_{ADC} < S_{ADCN} \Rightarrow M$ nằm ngoài DC.

$\frac{x}{h} = \frac{3}{4} \Rightarrow$ Vị trí của M trên tia DC.

Bài 23.

Bài 24.

HD: $GE \parallel BC$; $DI \parallel AB$; $\frac{OE}{CI} = \frac{OD}{DI} = \frac{OG}{BI}$

HD: $AB = BC = CD = BD = a$

a. $\frac{BN}{a} = \frac{a}{DM}$;

b. $\triangle NBD \sim \triangle DBM$

Bài 25.

HD: Kẻ $MD \parallel AC$;

$MB.AC = MD.BC$; $MC.AB = AD.BC$;

$(MD + AD) > MA$

Bài 26.

HD: $\triangle CBE$ vuông.

$MC = \frac{BC^2}{2AC}$; $AM = \frac{2AC^2 - BC^2}{2AC}$;

Bài 27.

HD: Kẻ $AI \parallel EF \parallel CJ$

a. $\frac{BA}{BE} + \frac{BC}{BE} = \frac{2BO}{BM} = 4$;

b. $\frac{AB}{AF} + \frac{AD}{AK} = 4$;

$\Rightarrow AB(\frac{1}{BF} + \frac{1}{AF}) + BC(\frac{1}{BE} + \frac{1}{AK}) = 8.$

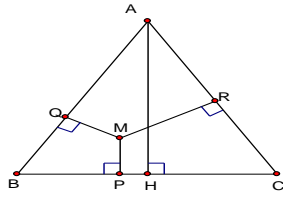
Bài 28.

HD: Chọn F đối xứng với B qua C .

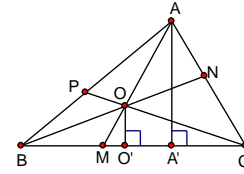
$BK + BE = EF + BE > BF.$

Bài 29.

Bài 30.

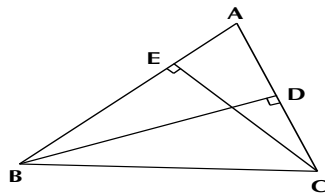


HD: $AB = BC = CA = a$; $AH = h$
 $S_{ABC} = S_{BMC} + S_{BMA} + S_{CMA}$

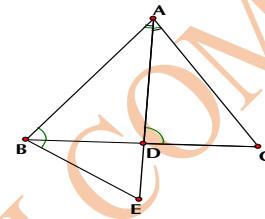


HD: $\frac{OM}{AM} = \frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}$; $\frac{ON}{BN} = \frac{S_{OAC}}{S_{ABC}}$; $\frac{OP}{CP} = \frac{S_{OAB}}{S_{ABC}}$

Bài 31.

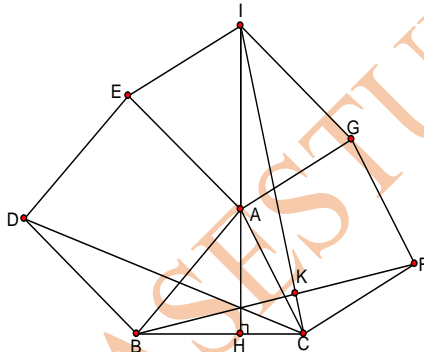


Bài 32.



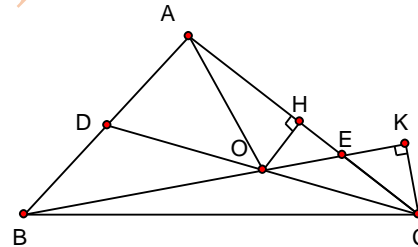
HD: Dựng E
 $\triangle AEB \sim \triangle ACD \sim \triangle BED$

Bài 33.



HD: a. $\triangle ABC = \triangle GIA$ (c-g-c) ;
 $\triangle BCF = \triangle IAC$ (c-g-c) ;
 b. K là giao điểm BF và CI
 $\Rightarrow BF \perp CI$, tương tự $CD \perp BI$, $\Rightarrow IH$; CD và BF là 3 đường cao $\triangle BIC$.

Bài 34.

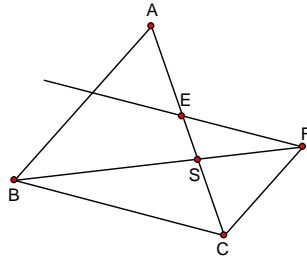


HD: a. $S_{AOD} = S_{BOD}$; $S_{ACD} = S_{BCD}$
 $\Rightarrow S_{AOC} = S_{BOC}$.

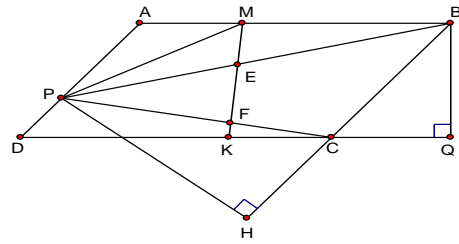
a. $S_{OEC} = \frac{1}{3} S_{OAC} \Rightarrow S_{OEC} = \frac{1}{3} S_{OBC}$
 $\Rightarrow BO = 3EO$.

Bài 35.

Bài 36.

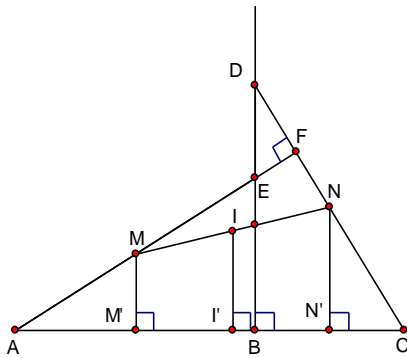


HD: Sử dụng định lý Ta-let cho các đường thẳng song song.



HD: $S_{PBC} = S_{BMKC} = \frac{1}{2} S_{ABCD}$.

Bài 37.



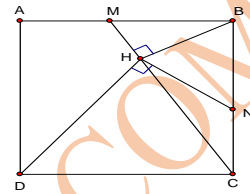
HD: a. $\Delta ABE = \Delta DBC$

b. $II' = \frac{m}{4}$.

c. $S_{ABE} + S_{BCD} = AB \cdot BC$

\Rightarrow Vị trí của B trên AC.

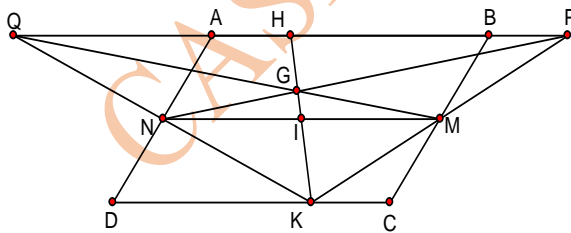
Bài 38.



HD: $DHC = NHB; HCD = NBH$

b. $MB = NB \Rightarrow AM = CN$

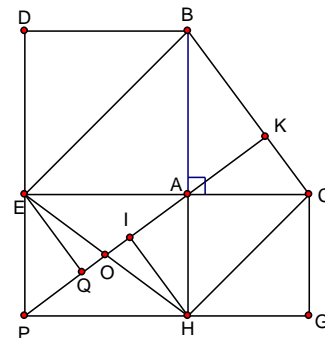
Bài 39.



HD: a. $BP // DC; QA // DC$

b. G là trọng tâm $\Delta KPQ \Rightarrow H$ là trung điểm $PQ \Rightarrow I$ là trung điểm $MN \Rightarrow I$ cố định

Bài 40.

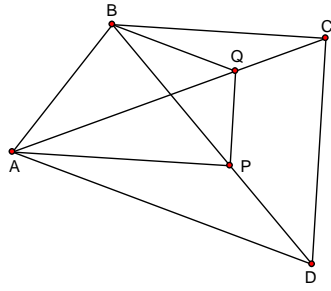


HD: b. P là giao điểm DE và GH ; O là giao điểm HE và AK; $EQ \perp AK; HI \perp AK$.

$\Rightarrow EQ = AK = HI \Rightarrow O$ là trung điểm EH

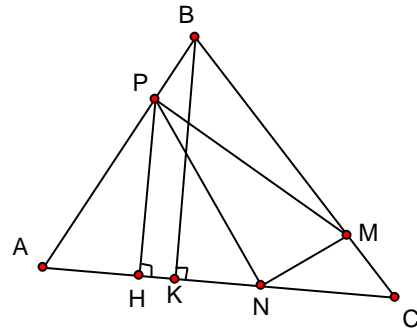
Bài 41.

Bài 42.



HD: AC cắt BD tại O.

$\frac{OB}{OD} = \frac{OQ}{OA}$; $\frac{OP}{OB} = \frac{OA}{OC}$. Nhân theo vế 2 tỉ lệ thức trên ta được đpcm.

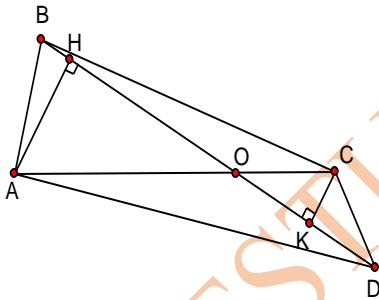


HD: a. $\frac{PH}{BK} = \frac{AP}{AB}$; $S_1 = \frac{PH \cdot AN}{BK \cdot AC}$.

b. Đặt $\frac{AP}{AB} = a$; $\frac{CN}{AC} = b$; $\frac{BM}{BC} = c$.

$$\Rightarrow \frac{S_1 \cdot S_2 \cdot S_3}{S_3} = a(1-a)b(1-b)c(1-c)$$

Bài 43.



HD: $AH = \frac{1}{2} OA$; $CK = \frac{1}{2} OC$.