

CASESTUDY 24H - GÓC CHIA SẺ KIẾN THỨC

-----o0o-----

NGUYỄN HỮU TUYẾN

MÔN HỌC: TOÁN 9

**TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN
CƠ BẢN & NÂNG CAO**

HÀ NỘI - 2018

MỤC LỤC

Trang

LỜI NÓI ĐẦU.....	
PHẦN SỐ HỌC	1
CHUYÊN ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA	1
A. Lý thuyết.....	1
B. Bài tập	1
Dạng 1: Thực hiện phép tính, rút gọn biểu thức số	1
Dạng 2. Chứng minh đẳng thức.....	3
Dạng 3. Bài toán tìm x	4
Dạng 4. Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất.....	4
Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của một biểu thức.....	4
Dạng 6. Phân tích đa thức thành nhân tử.....	4
Dạng 7. So sánh căn bậc hai.....	5
Dạng 8. Bài toán rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai.....	5
Bài tập tổng hợp.....	8
CHUYÊN ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT	10
A. Lý thuyết.....	10
B. Bài tập	10
Dạng 1. Tính giá trị hàm số, biểu diễn điểm lên mặt phẳng tọa độ.....	10
Dạng 2. Xác định, chứng minh hàm số đồng biến, nghịch biến.....	11
Dạng 3. Vẽ đồ thị hàm số. Tìm tọa độ giao điểm. Tính toán trên hình vẽ.....	12
Dạng 4. Tìm công thức hàm số; phương trình đường thẳng.	12
Dạng 5. Tìm giá trị của tham số thỏa mãn điều kiện cho trước	13
Bài tập tổng hợp.....	15
CHUYÊN ĐỀ 3. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	16
A. Lý thuyết.....	16
B. Bài tập	16
Dạng 1. Giải hệ phương trình cơ bản và đưa về dạng cơ bản	16
Dạng 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế.....	17
Dạng 3. Giải các hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ	17
Dạng 4. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số	17
Dạng 5. Giải và biện luận các hệ phương trình.....	18
A. Lý thuyết.....	18
B. Bài tập	18
CHUYÊN ĐỀ 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN	22
A. Lý thuyết.....	22
B. Bài tập	22

Dạng 1. Giải bài toán làm chung, làm riêng	22
Dạng 2. Giải bài toán chuyển động	24
Dạng 3. Giải bài toán hình học	25
Dạng 4. Giải bài toán tìm số	25
Dạng 5. Một số dạng toán khác	26
CHUYÊN ĐỀ 5. HÀM SỐ $Y = A.X^2$	27
A. Lý thuyết.....	27
B. Bài tập	28
CHUYÊN ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN	28
A. Lý thuyết.....	28
B. Bài tập	29
Dạng 1. Giải các phương trình bậc 2.....	29
Dạng 2. Giải và biện luận các phương trình bậc 2.....	30
Dạng 3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc 2.....	33
PHẦN HÌNH HỌC	35
CHUYÊN ĐỀ 1. HỆ THỨC LƯỢNG, TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC TRONG TAM GIÁC VUÔNG	35
A. Lý thuyết.....	35
B. Bài tập	36
Dạng 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông	36
Dạng 2. Tỉ số lượng giác trong tam giác vuông.....	36
Dạng 3. Hệ thức quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông	37
Bài tập tổng hợp.....	38
CHUYÊN ĐỀ 2. ĐƯỜNG TRÒN	40
A. Lý thuyết.....	40
Dạng 1. Bài tập cơ bản về đường tròn	42
Dạng 2. Bài tập cơ bản về tiếp tuyến với đường tròn	43
CHUYÊN ĐỀ 3. GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG	45
A. Lý thuyết.....	45
B. Bài tập	45
CHUYÊN ĐỀ 4. GÓC NỘI TIẾP	47
A. Lý thuyết.....	47
B. Bài tập	48
Bài tập tổng hợp.....	49
CHUYÊN ĐỀ 5. TỨ GIÁC NỘI TIẾP	53
A. Lý thuyết.....	53
B. Bài tập	53
CHUYÊN ĐỀ 6. HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU	59

Dạng 1. Hình trụ	60
A. Lý thuyết	60
B. Bài tập	60
Dạng 2. Hình nón - Hình nón cụt	60
A. Lý thuyết	60
B. Bài tập	61
Dạng 3. Hình cầu	62
A. Lý thuyết	62
B. Bài tập	62

CASESTUDY24H.COM

LỜI NÓI ĐẦU

Thân gửi các em học sinh,

Cuốn sách là tổng hợp các bài tập cơ bản và nâng cao theo từng chương lý thuyết được học. Với mong muốn, các em có điều kiện luyện tập nhiều hơn nên Thầy tổng hợp lại các dạng bài đặc trưng này. Hy vọng các em sẽ tích cực học tập để đạt được kết quả tốt nhất.



CASESTUDY24H.COM

It's never too late to study! - Góc chia sẻ kiến thức

MINH TUYẾN - Tel: 034 9607 266 - Skype: nguyenhuu.tuyen1 - Email: casestudy24h@gmail.com



Share and share



knowledge

Không bao giờ là quá muộn cho việc học tập.

Cùng nhau chia sẻ kiến thức và nâng tầm hiểu biết cùng Casestudy24h.

CASESTUDY24H.COM

PHẦN SỐ HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1. CĂN BẬC HAI, CĂN BẬC BA

A. Lý thuyết

1. Căn bậc hai số học $\sqrt{a} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = a \end{cases}$

2. Điều kiện tồn tại của \sqrt{A} là $A \geq 0$.

3. Các công thức khai căn bậc hai

a. $\sqrt{A^2} = |A| = \begin{cases} A \\ -A \end{cases}$

b. $\sqrt{A \cdot B} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B}$ với $A \geq 0, B \geq 0$

→ Tổng quát: $\sqrt{A_1 A_2 \dots A_n} = \sqrt{A_1} \cdot \sqrt{A_2} \dots \sqrt{A_n}$ với $A_i \geq 0 (1 \leq i \leq n)$.

c. Với $A \geq 0, B > 0$ ta có: $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}}$

d. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B}$

Khi đưa thừa số A^2 ra ngoài dấu căn bậc hai ta được $|A|$

4. Đưa thừa số vào trong dấu căn bậc hai:

$A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B}$ với $A \geq 0$

$A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B}$ với $A < 0$

5. Khử mẫu của biểu thức dưới dấu căn bậc hai:

- Nhân mẫu số với thừa số phụ thích hợp để mẫu số là một bình phương:

$$\sqrt{\frac{A}{B}} = \sqrt{\frac{A \cdot B}{B^2}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{A \cdot B} \quad (B \neq 0, A \cdot B \geq 0)$$

- Nhân liên hợp với căn bậc hai của mẫu

i. $\frac{m}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} - \sqrt{B})}{A - B}$

ii. $\frac{m}{\sqrt{A} - \sqrt{B}} = \frac{m(\sqrt{A} + \sqrt{B})}{A - B}$

B. Bài tập

Dạng 1: Thực hiện phép tính, rút gọn biểu thức số

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau

a) $A = 3\sqrt{3} + 4\sqrt{12} - 5\sqrt{27}$

b) $B = \sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{18}$

c) $C = \sqrt{72} + \sqrt{4\frac{1}{2}} - \sqrt{32} - \sqrt{162}$

d) $D = \frac{1}{2}\sqrt{48} - 2\sqrt{75} - \frac{\sqrt{33}}{\sqrt{11}} + 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

Bài 2. Thực hiện phép tính, rút gọn các biểu thức sau

a) $A = (\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)$

c) $B = (\sqrt{45} + \sqrt{63})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$

b) $C = (\sqrt{5} + \sqrt{3})(5 - \sqrt{15})$

d) $D = (\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{27})(\sqrt{27} + \sqrt{50} - \sqrt{32})$

e) $E = 1 - (\sqrt{45} - \sqrt{20} - \sqrt{3})(\sqrt{20} - \sqrt{45} - \sqrt{3})$

f) $F = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{2}{3}}\right) : \frac{1}{\sqrt{6}}$

Bài 3. Thực hiện các phép tính sau đây

a) $(\sqrt{12} - \sqrt{48} - \sqrt{108} - \sqrt{192}) : 2\sqrt{3}$

d) $(2\sqrt{112} - 5\sqrt{7} + 2\sqrt{63} - 2\sqrt{28})\sqrt{7}$

b) $(2\sqrt{27} - 3\sqrt{48} + 3\sqrt{75} - \sqrt{192})(1 - \sqrt{3})$

e) $7\sqrt{24} - \sqrt{150} - 5\sqrt{54}$

c) $2\sqrt{20} - \sqrt{50} + 3\sqrt{80} - \sqrt{320}$

f) $\sqrt{32} - \sqrt{50} + \sqrt{98} - \sqrt{72}$

Bài 4. Thực hiện các phép tính sau đây

a) $\sqrt[3]{27} - 2\sqrt[3]{8}$

c) $\frac{x-1}{\sqrt[3]{x-1}} - \frac{x+1}{\sqrt[3]{x+1}} - \sqrt[3]{8x}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}} - \sqrt[3]{2^2 \cdot 5^3} + \sqrt[3]{4^4}$

d) $\sqrt[3]{x\sqrt{x+3x}+3x+3\sqrt{x+1}} - \sqrt{x-2\sqrt{x+1}}$

Bài 5. Thực hiện các phép tính sau đây

a) $\sqrt{75} - \sqrt{5\frac{1}{3}} + \frac{9}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}} + 2\sqrt{27}$

j) $(1 - \sqrt{3})^2(1 + 2\sqrt{3})^2$

b) $\sqrt{48} + \sqrt{5\frac{1}{3}} + 2\sqrt{75} - 5\sqrt{1\frac{1}{3}}$

k) $\frac{1}{7+4\sqrt{3}} + \frac{1}{7-4\sqrt{3}}$

c) $\left(\sqrt{18} + \sqrt{0.5} - 3\sqrt{\frac{1}{3}}\right) - \left(\sqrt{\frac{1}{8}} - \sqrt{75}\right)$

l) $\left(1 - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) : \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2} + 2\right)$

d) $(\sqrt{15} + 2\sqrt{3})^2 + 12\sqrt{5}$

m) $\frac{\sqrt{5}-2}{5+2\sqrt{5}} - \frac{1}{2+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

e) $(\sqrt{6} + 2)(\sqrt{3} - \sqrt{2})$

n) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) : \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}\right)$

f) $(\sqrt{3} + 1)^2 - 2\sqrt{3} + 4$

g) $(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} + 3)$

h) $\sqrt{3}(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 - (\sqrt{3} + \sqrt{2})$

o) $\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} - (\sqrt{3} + 2)$

i) $(1 + 2\sqrt{3} - \sqrt{2})(1 + 2\sqrt{3} + \sqrt{2})$

Bài 6. Rút gọn biểu thức

a) $A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1}$

b) $B = \frac{1}{1-\sqrt{2}} + \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

c) $C = \frac{5 + \sqrt{5}}{5 - \sqrt{5}} + \frac{5 - \sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}}$

d) $D = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}-1} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{\sqrt{3}+1}+1}$

Bài 7. Rút gọn biểu thức

a) $A = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+2)^2}$

e) $E = \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} + \sqrt{4-2\sqrt{3}}$

b) $B = \sqrt{15-6\sqrt{6}} + \sqrt{33-12\sqrt{6}}$

f) $F = \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$

c) $C = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} - \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$

g) $G = \left(\frac{1}{3-\sqrt{5}} - \frac{1}{3+\sqrt{5}} \right) : \frac{5-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}$

d) $D = \sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{7-3\sqrt{5}} - \sqrt{2}$

h) $H = \sqrt{x+2\sqrt{2x-4}} + \sqrt{x-2\sqrt{2x-4}}$ với $x \geq 2$

Bài 8. Thực hiện các phép tính sau đây

a) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}-1}{2+\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+1} \left(\frac{\sqrt{3}}{2-\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{3}}{2+\sqrt{6}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{15}{\sqrt{6}+1} + \frac{4}{\sqrt{6}-2} + \frac{12}{\sqrt{6}-3} - \sqrt{6}$

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{3}+5}$

d) $\left(\frac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} \right) (\sqrt{3}-1)^2$

e) $\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$

Bài 9. Tính giá trị của biểu thức

a) $2\sqrt{3} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2}$

d) $\sqrt{17-3\sqrt{32}} + \sqrt{17+3\sqrt{32}}$

b) $\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} + \frac{5-\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$

e) $(2+\sqrt{5}+\sqrt{3})(2+\sqrt{5}-\sqrt{3})$

c) $(\sqrt{28}-\sqrt{12}-\sqrt{7})\sqrt{7} + 2\sqrt{21}$

f) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} - \sqrt{\frac{4}{3}} + \sqrt{3} \right) : \sqrt{3}$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

Bài 1. Chứng minh

a) $\sqrt{9-4\sqrt{5}} - \sqrt{5} = -2$

b) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = 3+2\sqrt{2}$

c) $2\sqrt{2}(\sqrt{3}-2) + (1+2\sqrt{2})^2 - 2\sqrt{6} = 9$

d) $\sqrt{\frac{4}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{4}{(2+\sqrt{5})^2}} = 8$

e) $(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})\sqrt{3-\sqrt{5}} = 8$

f) $\sqrt{\sqrt{2}+1} - \sqrt{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2(\sqrt{2}-1)}$

Bài 2. Chứng minh

a) $\frac{(x\sqrt{y} + y\sqrt{x})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{\sqrt{xy}} = x - y$ với $x > 0$ và $y > 0$

b) Cho $A = \frac{\sqrt{4x^2 - 4x + 1}}{4x - 2}$. Chứng minh : $|A| = 0,5$ với $x \neq 0,5$

Dạng 3. Bài toán tìm x

Bài 1. Tìm x biết

a) $\sqrt{1 - 4x + 4x^2} = 5$

c) $\sqrt{4 - 5x} = 12$

b) $\sqrt{10 + \sqrt{3x}} = 2 + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{4x + 20} - 3\sqrt{5 + x} + \frac{4}{3}\sqrt{9x + 45} = 6$

Bài 2. Tìm x biết

a) $\sqrt{x^2 - 9} - 3\sqrt{x - 3} = 0$

b) $\sqrt{\frac{4x + 3}{x + 1}} = 3$

Bài 3. Tìm x biết

a) $\sqrt{x - 2} \leq 3$

b) $\sqrt{x + 1} \geq \sqrt{5}$

Bài 4. Tìm x biết

a) $\sqrt{9x^2 - 6x + 1} = 2$

b) $\frac{3}{2}\sqrt{3x} - \sqrt{3x} - 5 = \frac{1}{2}\sqrt{3x}$

Dạng 4. Giá trị lớn nhất, Giá trị nhỏ nhất

Bài 1. Tìm x để các biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất

a) $A = \sqrt{x - 4} - 2$

c) $B = x - 4\sqrt{x} + 10$

b) $C = x - \sqrt{x}$

d) $D = \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 1$

Bài 2. Tìm x để các biểu thức sau đạt giá trị lớn nhất

a) $M = \sqrt{3} - \sqrt{x} - 1$

b) $N = 6\sqrt{x} - x - 1$

c) $P = \frac{1}{x - \sqrt{x} + 1}$

Dạng 5. Tìm giá trị nguyên của một biểu thức

Bài 1. Tìm các giá trị nguyên của x để các biểu thức sau có giá trị nguyên

$A = \frac{x + 2}{x - 5}$

$B = \frac{3x + 1}{2 - x}$

Bài 2. Tìm các giá trị nguyên của x để các biểu thức sau có giá trị nguyên

$C = \frac{\sqrt{x} + 3}{\sqrt{x} - 2}$

$D = \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 3}$

Dạng 6. Phân tích đa thức thành nhân tử

Bài 1. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x\sqrt{x} + \sqrt{x} - x - 1$

d) $\sqrt{ab} + 2\sqrt{a} + 3\sqrt{b} + 6$

g) $(1 + \sqrt{x})^2 - 4\sqrt{x}$

- b) $\sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$ e) $x - 2\sqrt{x-1} - a^2$ h) $a + \sqrt{a} + 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{b}$
 c) $x\sqrt{x} + y\sqrt{y} + x - y$ f) $x - \sqrt{x} - 2$

Bài 3. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $x - 3\sqrt{x} + 2$ d) $x^2 - 3x\sqrt{y} + 2y$ g) $x + 2\sqrt{x-1}$
 b) $\sqrt{x^3} - 2\sqrt{x} - x$ e) $-6x + 5\sqrt{x} + 1$ h) $7\sqrt{x} - 6x - 2$
 c) $x + 4\sqrt{x} + 3$ f) $2a + \sqrt{ab} - 6b$

Bài 4. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

- a) $x - 5\sqrt{x} + 6$ d) $2a - \sqrt{ab} - 6b$ g) $3\sqrt{a} - 2a - 1$
 b) $4a - 4\sqrt{a} - 1$ e) $x - 2 + \sqrt{x^2 - 4}$ h) $x^2 - \sqrt{x} + x - 1$
 c) $2a - 5\sqrt{ab} + 3b$ f) $x^4 - 4x^3 + 4x^2$ i) $3x - 2x^2 - 1$

Dạng 7. So sánh căn bậc hai

Bài 1. So sánh các căn bậc hai

- a) $4\sqrt{7}$ và $3\sqrt{13}$ g) $3\sqrt{12}$ và $2\sqrt{16}$ l) $\frac{1}{4}\sqrt{82}$ và $6\sqrt{\frac{1}{7}}$
 b) $3\sqrt{12}$ và $2\sqrt{16}$ h) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}$ và $\frac{1}{3}\sqrt{19}$ m) $3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$ và 2
 c) $\sqrt{7} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{49}$ i) $\sqrt{2} + \sqrt{11}$ và $\sqrt{3} + 5$ n) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{17}{2}}$ và $\frac{1}{3}\sqrt{19}$
 d) $\sqrt{21} - \sqrt{5}$ và $\sqrt{20} - \sqrt{6}$ j) $\frac{1}{4}\sqrt{82}$ và $6\sqrt{\frac{1}{7}}$ o) $\sqrt{\sqrt{6} + \sqrt{20}}$ và $\sqrt{1 + \sqrt{5}}$
 e) $\sqrt{7} - \sqrt{2}$ và 1 k) $\sqrt{30} - \sqrt{29}$ và $\sqrt{29} - \sqrt{28}$ p) $\sqrt{8} + \sqrt{5}$ và $\sqrt{7} + \sqrt{6}$
 f) $\sqrt{27} + \sqrt{6} + 1$ và $\sqrt{48}$ k) $5\sqrt{2} + \sqrt{75}$ và $5\sqrt{3} + \sqrt{50}$ q) $\sqrt{5} - \sqrt{3}$ và $\frac{1}{2}$

Bài 2. Sắp xếp theo thứ tự tăng dần: $5\sqrt{2}; 2\sqrt{5}; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{2}$

Dạng 8. Bài toán rút gọn biểu thức chứa căn bậc hai

Bài 1. Cho các biểu thức $A = (\sqrt{8} - \sqrt{12})(\sqrt{2} + \sqrt{3})$ $B = \frac{1}{\sqrt{x-3}} + \frac{1}{\sqrt{x+3}}$

- a) Tìm tập xác định của B rồi rút gọn B
 b) Tính giá trị biểu thức A
 c) Tìm x để A = B

Bài 2. Cho các biểu thức

$$A = (\sqrt{45} + \sqrt{63})(\sqrt{7} - \sqrt{5})$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} + 1 \quad (\text{ĐK: } x \geq 0; x \neq 1)$$

- Tính giá trị biểu thức A và rút gọn biểu thức B
- Tìm x để A = B

Bài 3. Cho các biểu thức

$$A = \left(\frac{1}{1-\sqrt{3}} - \frac{1}{1+\sqrt{3}} \right) : \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} \quad (\text{ĐK: } x > 0; x \neq 1)$$

- Rút gọn các biểu thức A và B
- Tìm x để $A = \frac{1}{6} B$

Bài 5. Cho biểu thức: $P = \frac{x-5}{\sqrt{x-2}-\sqrt{3}}$

- Tìm tập xác định của biểu thức P
- Rút gọn P
- Tìm giá trị của x để P đạt giá trị nhỏ nhất. Tính giá trị nhỏ nhất đó

Bài 6. Cho các biểu thức

$$A = 10 - (\sqrt{32} - \sqrt{8} - \sqrt{27})(\sqrt{8} - \sqrt{32} - \sqrt{27})$$

$$B = \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{2\sqrt{x}-1}{4-x} \quad (\text{ĐK: } x \geq 0; x \neq 4)$$

- Rút gọn A và B
- Tìm x để A.B = -1

Bài 7. Cho biểu thức $Q = \frac{2}{2+\sqrt{x}} + \frac{1}{2-\sqrt{x}} + \frac{2\sqrt{x}}{x-4}$

- Rút gọn biểu thức Q
- Tìm x để $Q = \frac{6}{5}$
- Tìm các giá trị nguyên của x để biểu thức Q có giá trị nguyên.

Bài 8. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

- Tìm tập xác định của biểu thức A
- Rút gọn biểu thức A
- Chứng minh rằng $A > 0$ với mọi $x \neq 1$
- Tìm x để A đạt GTLN, tìm GTLN đó

Bài 9. Cho biểu thức $E = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} + 4\sqrt{x} \right) : \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$

- Rút gọn biểu thức E
- Tìm x để E = 2
- Tính giá trị của E khi $x = (4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6})\sqrt{4 - \sqrt{15}}$

Bài 10. Cho biểu thức $P = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{2+5\sqrt{x}}{4-x}$

- a) Rút gọn P nếu $x \geq 0, x \neq 4$
 b) Tìm x để $P = 2$

Bài 11. Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$

- a) Rút gọn Q với $a > 0, a \neq 4$ và $a \neq 1$ b) Tìm giá trị của a để Q dương

Bài 12. Cho biểu thức : $B = \left(\frac{2x+1}{\sqrt{x^3}-1} - \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1+\sqrt{x^3}}{1+\sqrt{x}} - \sqrt{x} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- a) Rút gọn B b) Tìm x để $B = 3$

Bài 13. Cho biểu thức $C = \left(\frac{\sqrt{x}}{3+\sqrt{x}} + \frac{x+9}{9-x} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{x-3\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 9$

- a) Rút gọn C b) Tìm x sao cho $C < -1$

Bài 14. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} - \frac{1}{x-\sqrt{x}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} + \frac{2}{x-1} \right)$

- a) Tìm điều kiện của x để P xác định
 b) Rút gọn P
 c) Tìm các giá trị của x để $P < 0$
 d) Tính giá trị của P khi $x = 4 - 2\sqrt{3}$

Bài 15. Cho biểu thức $P = \left(\sqrt{x} - \frac{x+2}{\sqrt{x}+1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-4}{1-x} \right)$

- a) Rút gọn P b) Tìm x để $P = \frac{1}{2}$
 c) Tìm GTNN của P và giá trị tương ứng của x.

Bài 16. Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-1} - \frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} \right) \left(\frac{1-x}{\sqrt{2}} \right)^2$

- a) Rút gọn P
 b) Chứng minh rằng nếu $0 < x < 1$ thì $P > 0$
 c) Tìm GTLN của P

Bài 17. Cho biểu thức $P = \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}} + \frac{x+1}{\sqrt{x}}$

- a) Rút gọn P b) Tìm x để $P = \frac{9}{2}$

Bài 18. Cho biểu thức $P = \left(\frac{x\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \right) : \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right)$ với $x \geq 0, x \neq 1$

- a) Rút gọn P b) Tìm x để P = 3

Bài tập tổng hợp

Bài 1. Cho biểu thức: $D = \left(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} \right) : \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right) + \frac{1}{x+1}$

- a) Rút gọn D.
 b) Tính giá trị của D khi $x^2 - x = 0$
 c) Tìm giá trị của x khi $D = \frac{3}{2}$

Bài 2. Cho biểu thức $E = \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x}{1-x} + \frac{2}{x^2-2} \right)$

- a) Rút gọn E. b) Tính E khi $x^2 - 9 = 0$ c) Tìm giá trị của x để E = -3
 d) Tìm x để E < 0 e) Tính x khi $E - x - 3 = 0$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau

$$A = \left(\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{2x-1}{2x+1} \right) : \frac{4x}{10-5}$$

$$B = \left(\frac{1}{x^2+x} - \frac{2-x}{x+1} \right) : \left(\frac{1}{x} + x - 2 \right)$$

$$C = \frac{1}{x-1} - \frac{x^3-x}{x^2+1} \left(\frac{1}{x^2-2x+1} + \frac{1}{1-x^2} \right)$$

Bài 4. Cho $M = \left(\frac{5x+2}{x^2-10x} + \frac{5x-2}{x^2+10x} \right) \frac{x^2-100}{x^2+4}$

- a) Tìm x để M có nghĩa. b) Rút gọn M c) Tính M khi x = 2004

Bài 5. Cho $N = \frac{1}{x^2-2x+1} - \left(\frac{x}{x^2-1} - \frac{1}{x^3-x} \right) : \frac{x^2-2x+1}{x+x^3}$

- a) Tìm TXĐ của N b) Rút gọn N.
 c) Tính giá trị của N khi x = 2; x = -1. d) Tìm x để N = -1
 e) Chứng minh rằng N < 0 với mọi x thuộc TXĐ f) Tìm x để N > -1

Bài 6. Cho $A = \left(\frac{\sqrt{a}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{a}} \right) \left(\frac{a-\sqrt{a}}{\sqrt{a}+1} - \frac{a+\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} \right)$

- a) Rút gọn A b) Tìm a để A = 4; A > -6 c) Tính A khi $a^2 - 3 = 0$

Bài 7. Cho biểu thức: $A = \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1} - \frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1} + 4\sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right)$

- a) Rút gọn A. b) Tính A khi $a = \frac{\sqrt{6}}{2 + \sqrt{6}}$ c) Tìm a để $\sqrt{A} > A$

Bài 8. Cho biểu thức: $B = \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}+1} + \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) : \frac{\sqrt{x}-1}{2}$

- a) Rút gọn B b) Chứng minh rằng: $B > 0$ với mọi $x > 0$ và $x \neq 1$

Bài 9. Cho biểu thức: $K = \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{a-\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} + \frac{2}{a-1} \right)$

- a) Rút gọn biểu thức K.
b) Tính giá trị của K khi $a = 3 + 2\sqrt{2}$
c) Tìm giá trị của a sao cho $K < 0$

Bài 10. Cho biểu thức: $D = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$

- a) Rút gọn D b) Tìm a để $D = 2$
c) Cho $a > 1$ hãy so sánh D và $|D|$ d) Tìm D min

Bài 11. Cho biểu thức: $H = \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}+3} - \frac{5}{a+\sqrt{a}-6} + \frac{1}{2-\sqrt{a}}$

- a) Rút gọn H. b) Tìm a để $D < 2$.
c) Tính H khi $a^2 + 3a = 0$ d) Tìm a để $H = 5$.

Bài 12. Cho biểu thức:

$$N = 1 : \left(\frac{x+2}{x\sqrt{x}-1} + \frac{\sqrt{x}+1}{x+1+\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}+1}{x-1} \right)$$

- a) Rút gọn N. b) So sánh N với 3.

Bài 13. Cho biểu thức:

$$M = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}} - \frac{\sqrt{x^3} - x}{1 - \sqrt{x}}$$

- a) Rút gọn M. b) Tìm x để $M > 0$. c) Tính M khi $x = \frac{53}{9 - 2\sqrt{7}}$

Bài 14. Cho biểu thức: $V = \left(\frac{3}{\sqrt{a+1}} + \sqrt{1-a} \right) : \left(\frac{3}{\sqrt{1-a^2}} + 1 \right)$

- a) Rút gọn V. b) Tìm a để $V = \sqrt{V}$ c) Tính M khi $a = \frac{\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$

CHUYÊN ĐỀ 2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa

Hàm số bậc nhất là hàm số được cho bởi công thức $y = ax + b$ trong đó a, b là các số cho trước và $a \neq 0$.

2. Tính chất

Hàm số bậc nhất $y = ax + b$ xác định với mọi $x \in R$ và có tính chất

- Đồng biến trên R khi $a > 0$.
- Nghịch biến trên R khi $a < 0$.

3. Đồ thị

Đồ thị của hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$) là một đường thẳng cắt cả hai trục tọa độ.

- Cắt trục tung (Oy) tại điểm $B(0; b)$.
- Cắt trục hoành (Ox) tại điểm $A\left(\frac{-b}{a}; 0\right)$.

Gọi a là hệ số góc, b là tung độ gốc.

4. Đường thẳng song song, đường thẳng cắt nhau

Cho hai đường thẳng (d): $y = ax + b$ ($a \neq 0$) và (d'): $y = a'x + b'$ ($a' \neq 0$) thì:

- (d) cắt (d') $\Leftrightarrow a \neq a'$
- (d) // (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b \neq b' \end{cases}$
- (d) trùng (d') $\Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$
- (d) \perp (d') $\Leftrightarrow a \cdot a' = -1$

5. Hệ số góc của đường thẳng

- Đường thẳng $y = ax + b$ có hệ số góc là a . Các đường thẳng có cùng hệ số góc a (a là hệ số của x) thì tạo với trục Ox các góc bằng nhau.
- Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng $y = ax + b$ và trục Ox ta có :
 Nếu $a > 0$ thì $\tan \alpha = a$
 Nếu $a < 0$ thì $\tan \alpha = -a$

B. Bài tập

Dạng 1. Tính giá trị hàm số, biểu diễn điểm lên mặt phẳng tọa độ

Bài 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x$.

Tính $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(2)$; $f(3)$.

Bài 2. Cho hàm số $y = g(x) = \frac{2}{3}x + 3$.

Tính $g(-2)$; $g(-1)$; $g(0)$; $g\left(\frac{1}{2}\right)$; $g(1)$; $g(2)$; $g(3)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x + 3$. Tính các giá trị tương ứng của y theo x rồi điền vào bảng sau:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y = -\frac{1}{2}x + 3$											

Bài 4. Tính các giá trị tương ứng của y theo x rồi điền vào bảng sau

x	-2,5	-2,25	-1,5	-1	0	1	1,5	2,25	2,5
$y = 0,5x$									
$y = 0,5x + 2$									

Bài 5. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-3}{4}x$.

Tính $f(-5)$; $f(-4)$; $f(0)$; $f\left(\frac{1}{2}\right)$; $f(1)$; $f(a)$; $f(a+1)$.

Bài 6. Hãy biểu diễn các điểm sau trên mặt phẳng tọa độ:

$A(-3; 0)$; $B(-1; -1)$; $C(0; 3)$; $D(1; 1)$; $E(3; 0)$; $F(1; -1)$; $G(0; -3)$.

Bài 7. Cho hàm số $y = (3 - \sqrt{2})x + 1$.

a) Tính các giá trị của y khi x nhận các giá trị sau:

0 ; 1 ; $\sqrt{2}$; $3 + \sqrt{2}$; $3 - \sqrt{2}$.

b) Tính các giá trị của x khi y nhận các giá trị sau:

0 ; 1 ; 8 ; $2 + \sqrt{2}$; $2 - \sqrt{2}$.

Dạng 2. Xác định, chứng minh hàm số đồng biến, nghịch biến.

Bài 1. Cho hàm số bậc nhất $y = (1 - \sqrt{5})x - 1$.

a) Hàm số đồng biến hay nghịch biến trên R? vì sao ?

b) Tính y khi $x = 1 + \sqrt{5}$.

c) Tính x khi $y = \sqrt{5}$.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = 3x$. Chứng minh hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2}{3}x + 5$. Chứng minh hàm số đồng biến trên \mathbb{R} .

Bài 4. Cho hàm số $y = f(x) = 4 - \frac{2}{5}x$. Chứng minh hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} .

Dạng 3. Vẽ đồ thị hàm số. Tìm tọa độ giao điểm. Tính toán trên hình vẽ

Bài 1. Vẽ đồ thị các hàm số $y = 2x$; $y = 2x + 5$; $y = \frac{-2}{3}x$; $y = \frac{-2}{3}x + 5$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

Bài 2. Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = x$ và $y = 2x + 2$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ. Gọi A là giao điểm của hai đồ thị nói trên, tìm tọa độ điểm A .

Bài 3.

- Vẽ đồ thị của hai hàm số $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Hai đường thẳng $y = x + 1$ và $y = -x + 3$ cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B . Tìm tọa độ các điểm A, B, C .
- Tính chu vi và diện tích tam giác ABC .

Bài 4.

- Vẽ đồ thị các hàm số $y = x (d_1)$; $y = 2x (d_2)$; $y = -x + 3 (d_3)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Đường thẳng (d_3) cắt các đường thẳng (d_1) , (d_2) theo thứ tự tại A và B . Tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác OAB .

Bài 5.

a) Vẽ đồ thị các hàm số $y = \frac{2}{3}x + 2 (d_1)$; $y = -\frac{2}{3}x + 2 (d_2)$ trên cùng một mặt phẳng tọa độ.

b) Một đường thẳng song song trục Ox cắt trục Oy tại điểm có tung độ bằng 1, cắt (d_1) , (d_2) theo thứ tự tại M và N . Tìm tọa độ các điểm A, B và tính diện tích tam giác OMN .

Dạng 4. Tìm công thức hàm số; phương trình đường thẳng.

Bài 1. Cho hàm số $y = ax + 3$. Tìm hệ số a , biết rằng

- Khi $x = 1$ thì $y = 2,5$.
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -2x$.

Bài 2. Cho hàm số $y = 2x + b$. Tìm b biết rằng :

- Với $x = 4$ thì hàm số $y = 2x + b$ có giá trị bằng 5.
- Đồ thị hàm số đã cho cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng -3 .
- Đồ thị hàm số đã cho đi qua điểm $A(1; 5)$.

Bài 3. Cho hàm số $y = ax - 4$. Tìm hệ số a , biết rằng

- Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = 2x - 1$ tại điểm có hoành độ bằng 2.
- Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 2$ tại điểm có tung độ bằng 5.

Bài 4. Biết đồ thị của hàm số là đường thẳng đi qua gốc tọa độ, hãy xác định hàm số trong mỗi trường hợp sau:

- Đi qua điểm $A(3; 2)$
- Có hệ số a bằng 2.
- Song song với đường thẳng $y = 3x + 1$.

Bài 5. Hãy xác định hàm số $y = ax + b$ biết:

- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ -3 .
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = -3x$ và cắt trục tung tại điểm có tung độ $= 2$.
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = x - 3$ và cắt đường thẳng $y = -2x + 1$ tại điểm có hoành độ bằng 1.
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2 - 3x$ và cắt đường thẳng $y = x + 1$ tại điểm có tung độ bằng 2.
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x - 3$ và đi qua điểm $A(1; 1)$.
- Đồ thị hàm số vuông góc với đường thẳng $y = 3x + 1$ và đi qua điểm $M(1; 2)$.
- Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $P(2; 1)$ và $Q(-1; 4)$.

Dạng 5. Tìm giá trị của tham số thỏa mãn điều kiện cho trước

Bài 1. Cho hàm số $y = (m - 2)x + n$. Tìm điều kiện của m và n để:

- Hàm số là hàm số bậc nhất.
- Hàm số đồng biến.
- Hàm số nghịch biến.
- Đồ thị hàm số song song với đường thẳng $y = 2x - 1$.
- Đồ thị hàm số cắt đường thẳng $y = -3x + 2$.
- Đồ thị hàm số trùng đường thẳng $y = 3x - 2$.
- Đồ thị hàm số đi qua hai điểm $A(1; 2)$ và $B(3; 4)$.
- Đồ thị hàm số cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$ và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $2 + \sqrt{2}$.

Bài 2. Với những giá trị nào của m thì các hàm số sau là hàm số bậc nhất

$$a) y = \sqrt{m-3}x + \frac{2}{3}$$

$$b) y = \frac{1}{m+2}x - \frac{3}{4}$$

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{\sqrt{m} + \sqrt{5}}{\sqrt{m} - \sqrt{5}}x + 2012$

- Với những giá trị nào của m thì hàm số đã cho là hàm số bậc nhất?
- Tìm các giá trị của m để hàm số đã cho là hàm số bậc nhất đồng biến, nghịch biến trên \mathbb{R} .

Bài 4. Cho hai hàm số bậc nhất $y = 2x + 3k$ và $y = (2m + 1)x + 2k - 3$. Tìm điều kiện của m và k để đồ thị của hai hàm số là:

- Hai đường thẳng cắt nhau.
- Hai đường thẳng song song với nhau.
- Hai đường thẳng trùng nhau.

Bài 5.

a) Với những giá trị nào của m thì các hàm số $y = 2x + m + 3$ và $y = 3x + 5 - m$ cắt nhau tại một điểm trên trục tung.

b) Tìm m để đường thẳng $y = 2x - 1$ và đường thẳng $y = 3x + m$ cắt nhau tại một điểm trên trục hoành.

Bài 6. Tìm giá trị của a để hai đường thẳng $y = (a - 1)x + 2$ và $y = (3 - a)x + 1$ song song nhau.

Bài 7. Xác định k và m để hai đường thẳng sau đây trùng nhau:

$$y = kx + (m - 2) \quad \text{và} \quad y = (5 - k)x + (4 - m)$$

Bài 8. Cho đường thẳng $y = (k + 1)x + k$. (1)

- Tìm k để (1) đi qua gốc tọa độ
- Tìm k để (1) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $1 - \sqrt{2}$.
- Tìm k để (1) song song với đường thẳng $y = (\sqrt{3} + 1)x + 3$.

Bài 9. Cho đường thẳng $y = (1 - 4m)x + m - 2$ (d)

- Với giá trị nào của m thì (d) đi qua gốc tọa độ.
- Với giá trị nào của m thì (d) tạo với trục Ox một góc nhọn, góc tù.
- Với giá trị nào của m thì (d) cắt trục tung tại một điểm có tung độ bằng 2.
- Với giá trị nào của m thì (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng -1 .

Bài 10.

a) Với giá trị nào của m và n thì đường thẳng $y = (m - 1)x + n$ song song với trục Ox .

b) Cho hai đường thẳng (d): $y = -x + m + 2$ và (d'): $y = (m^2 - 2)x + 1$.

Khi $m = -2$ hãy tìm tọa độ giao điểm của chúng. Tìm m để $(d) // (d')$.

Bài 11. Cho ba đường thẳng sau $y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{2}$; $y = \frac{3}{5}x - \frac{5}{2}$; $y = k.x + 3,5$. Tìm giá trị của k để ba đường thẳng đồng quy tại một điểm.

Bài 12. Cho hàm số $y = k.x + 2k + 1$ (d).

- Tìm k để (d) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng $2\sqrt{3}$.
- Tìm k để (d) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 1.
- Chứng minh rằng: với mọi giá trị $k \geq 0$, các đường thẳng (d) luôn đi qua một điểm cố định. hãy xác định tọa độ điểm cố định đó.

Bài tập tổng hợp

Bài 1.

- Vẽ đồ thị hai hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:
 $y = 0,5x + 2$ và $y = 5 - 2x$.
- Hai đường thẳng trên cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm tọa độ các điểm A, B, C.
- Tính độ dài các đoạn thẳng AB, AC và BC.
- Tính góc tạo bởi đường thẳng $y = 0,5x + 2$ với trục Ox.

Bài 2.

- Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ:
 $y = 2x$ (1) ; $y = 0,5x$ (2) và $y = -x + 6$ (3).
- Giao điểm của đường thẳng (3) cắt đường thẳng (1) và (2) theo thứ tự tại A và B. Tìm tọa độ các điểm A, B.
- Tính khoảng cách AB.
- Tính các góc của tam giác OAB.

Bài 3. Cho hàm số $y = \frac{-1}{3}x$ có đồ thị là (d_1) và hàm số $y = 3x - 2$ có đồ thị là (d_2) .

- Vẽ đồ thị (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Tìm m để đường thẳng $y = (2m - 3)x + 3m - 2$ cắt (d_2) tại điểm có hoành độ bằng 1.
- Xác định đường thẳng $(d_3): y = ax + b$ biết $(d_3) // (d_1)$ và cắt (d_2) tại điểm có hoành độ bằng 2.

Bài 4. Cho $(d_1) : y = 2x - 1$ và $(d_2) : y = x - 2$

- Vẽ đồ thị (d_1) và (d_2) trên cùng một mặt phẳng tọa độ.
- Xác định tọa độ giao điểm A của (d_1) và (d_2) bằng phép tính.
- Tính góc tạo bởi (d_1) và (d_2) với trục Ox. (làm tròn đến phút)

- d) Viết phương trình đường thẳng (d_3) biết (d_3) cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng $\frac{4}{3}$ và (d_1) , (d_2) , (d_3) đồng quy.

Bài 5.

- a) Cho các điểm $M(-1 ; -2)$, $N(-2 ; -4)$, $P(2 ; -3)$, $Q(3 ; -4,5)$. Tìm tọa độ các điểm M' , N' , P' , Q' lần lượt đối xứng với M , N , P , Q qua trục Ox .
- b) Vẽ đồ thị các hàm số sau trên cùng một mặt phẳng tọa độ :
 $y = |x|$ và $y = |x + 1|$.
- c) Tìm tọa độ giao điểm của hai đồ thị trên. Từ đó suy ra phương trình $|x| = |x + 1|$ có một nghiệm duy nhất.

CHUYÊN ĐỀ 3. HỆ HAI PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Lý thuyết

- 1) Cho hai phương trình bậc nhất hai ẩn $a_1x + b_1y = c_1$ và $a_2x + b_2y = c_2$. Khi đó ta có hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn

$$(I) \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

- Nếu hai phương trình ấy có nghiệm chung $(x_0; y_0)$ thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ (I).
 - Nếu hai phương trình đã cho không có nghiệm chung thì ta nói hệ (I) vô nghiệm.
- 2) Hai hệ phương trình được gọi là tương đương với nhau nếu chúng có cùng tập hợp nghiệm.

B. Bài tập

Dạng 1. Giải hệ phương trình cơ bản và đưa về dạng cơ bản

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 4x - 2y = 3 \\ 6x - 3y = 5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 4x + 6y = 10 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x - 4y + 2 = 0 \\ 5x + 2y = 14 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ 3x - 2y = 14 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x\sqrt{5} - (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{5} = 1 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 0,2x + 0,1y = 0,3 \\ 3x + y = 5 \end{cases}$ g) $\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3} \\ x + y - 10 = 0 \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} (3x + 2)(2y - 3) = 6xy \\ (4x + 5)(y - 5) = 4xy \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2(x + y) + 3(x - y) = 4 \\ (x + y) + 2(x - y) = 5 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \text{c) } & \begin{cases} (2x-3)(2y+4) = 4x(y-3) + 54 \\ (x+1)(3y-3) = 3y(x+1) - 12 \end{cases} & \text{d) } & \begin{cases} \frac{2y-5x}{3} + 5 = \frac{y+27}{4} - 2x \\ \frac{x+1}{3} + y = \frac{6y-5x}{7} \end{cases} \\ \text{e) } & \begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)(y+3) - \frac{1}{2}xy = 50 \\ \frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}(x-2)(y-2) = 32 \end{cases} & \text{f) } & \begin{cases} (x+20)(y-1) = xy \\ (x-10)(y+1) = xy \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 2. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp thế

Bài 1. Giải các hệ phương trình

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{3}{4}x - 2y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + y = 2 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}y = 1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = 1 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} 0,5x + 0,25y = 1 \\ 2,5x + 1,25y = 5 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} (2-\sqrt{3})x - 3y = 2 + 5\sqrt{3} \\ 4x + y = 4 - 2\sqrt{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 3. Giải các hệ phương trình sau bằng cách đặt ẩn phụ

Bài 1. Giải các hệ phương trình

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \\ \frac{8}{x} + \frac{15}{y} = 1 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \frac{2}{x+2y} + \frac{1}{y+2x} = 3 \\ \frac{4}{x+2y} - \frac{3}{y+2x} = 1 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} \frac{3x}{x+1} - \frac{2}{y+4} = 4 \\ \frac{2x}{x+1} - \frac{5}{y+4} = 9 \end{cases} \\ \text{d) } & \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ 3x^2 - 2y^2 = -6 \end{cases} & \text{e) } & \begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 16 \\ 2\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = -11 \end{cases} & \text{f) } & \begin{cases} |x| + 4|y| = 18 \\ 3|x| + |y| = 10 \end{cases} \\ \text{g) } & \begin{cases} 2(x^2 - 2x) + \sqrt{y+1} = 0 \\ 3(x^2 - 2x) - 2\sqrt{y+1} = -7 \end{cases} & \text{h) } & \begin{cases} 5|x-1| - 3|y+2| = 7 \\ 2\sqrt{4x^2 - 8x + 4} + 5\sqrt{y^2 + 4y + 4} = 13 \end{cases} \end{aligned}$$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} \frac{2}{x} - \frac{3}{y} = 5 \\ \frac{2}{x} + \frac{1}{y} = 1 \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} \frac{6}{x-2y} + \frac{2}{x+2y} = 3 \\ \frac{3}{x-2y} + \frac{4}{x+2y} = -1 \end{cases} & \text{c) } & \begin{cases} \sqrt{x+3} - 2\sqrt{y+1} = 2 \\ 2\sqrt{x+3} + \sqrt{y+1} = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Dạng 4. Giải các hệ phương trình sau bằng phương pháp cộng đại số

Bài 1. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} 2x + 3y = -2 \\ 3x - 2y = -3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + 3y = 6 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 9x + 8y = 6 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 6y = 17 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$

e) $\begin{cases} 7x + 4y = 74 \\ 3x + 2y = 32 \end{cases}$

f) $\begin{cases} x - 3y = 6 \\ -2x + 6y = -12 \end{cases}$

Bài 2. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{4} - 2 = 0 \\ 5x - y = 11 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{3} = -\frac{1}{3} \\ 4a - 5b = 10 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{y}{3} \\ x + y = 10 \end{cases}$

Bài 3. Giải các hệ phương trình

a) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} (\sqrt{2} - 1)x - y = \sqrt{2} \\ x + (\sqrt{2} + 1)y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x\sqrt{2} - 3y = 1 \\ 2x + y\sqrt{2} = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x\sqrt{2} - y\sqrt{3} = 1 \\ x + y\sqrt{3} = \sqrt{2} \end{cases}$

e) $\begin{cases} x\sqrt{5} - (1 + \sqrt{3})y = 1 \\ (1 - \sqrt{3})x + y\sqrt{5} = 1 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 5x\sqrt{3} + y = 2\sqrt{2} \\ x\sqrt{6} - y\sqrt{2} = 2 \end{cases}$

Dạng 5. Giải và biện luận các hệ phương trình

A. Lý thuyết

Hệ phương trình $\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases}$ ($a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ khác 0)

- Vô nghiệm nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
- Có nghiệm duy nhất nếu $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$
- Có vô số nghiệm nếu $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

B. Bài tập

Bài 1. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a) $\begin{cases} mx + y = 3m - 1 \\ x + my = m + 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$

c) $\begin{cases} (m - 1)x - my = 3m - 1 \\ 2x - y = m + 5 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + my = 3m \\ mx - y = m^2 - 2 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x - my = 1 + m^2 \\ mx + y = 1 + m^2 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y = 3 + 2m \\ mx + y = (m + 1)^2 \end{cases}$

Bài 2. Giải và biện luận số nghiệm của mỗi hệ phương trình sau theo tham số m

a) $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} mx + 4y = 10 - m \\ x + my = 4 \end{cases}$

Bài 3. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - 2y = 1 \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm (x, y) duy nhất thoả mãn ($x > 0$; $y < 0$).

Bài 4. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ x + (m + 1)y = 2 \end{cases}$. Tìm m để hệ có nghiệm (x, y) duy nhất thoả mãn điểm M(x;y) nằm trong góc phần tư thứ nhất.

Bài 5. Tìm giá trị của tham số m để cho hệ phương trình $\begin{cases} mx - y = 2 \\ 3x + my = 5 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất (x;y) thoả mãn hệ thức $x + y = 1 - \frac{m^2}{m^2 + 3}$

Bài 6. Cho hệ phương trình $\begin{cases} (a + 1)x - y = a + 1 \\ x + (a - 1)y = 2 \end{cases}$

- Giải và biện luận số nghiệm của hệ phương trình theo tham số a.
- Khi hệ có nghiệm (x;y) duy nhất, lập hệ thức liên hệ giữa x và y độc lập với a. Từ đó, chứng tỏ M(x;y) nằm trên đường thẳng cố định.
- Tìm giá trị nguyên của a để hệ có nghiệm duy nhất thoả mãn x, y nguyên.
- Tìm giá trị của a để hệ có nghiệm (x;y) duy nhất thoả mãn điều kiện $x + y$ nhỏ nhất.

Bài 7. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2m + 1 \\ 2x - y = m - 1 \end{cases}$

- Giải hệ phương trình với $m = 5$
- Tìm m để hệ phương trình có nghiệm (x,y) thoả mãn $x = 3y + 1$

Bài 8. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 1 \\ x + my = 3m \end{cases}$

- Giải hệ phương trình với $m = 2$.
- Tìm m nguyên để hệ có nghiệm duy nhất là nghiệm nguyên.

Bài 9. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2m + 1 \\ 2x - y = m - 1 \end{cases}$ (I)

Tìm hệ thức liên hệ giữa các nghiệm x, y không phụ thuộc vào m.

Bài 10. Chứng minh rằng hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 2m + 1 \\ 2x - y = m - 1 \end{cases}$ luôn có nghiệm nằm trên một đường thẳng cố định.

Bài 11. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + my = 1 \\ mx - y = -m \end{cases}$ (với m là tham số)

- Chứng minh rằng với mọi giá trị của m hệ phương trình đã cho luôn có nghiệm duy nhất.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào giá trị của m.

Bài 12. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình với $m = -1$.

b) Chứng tỏ rằng với $m \neq \pm 1$ thì hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất nằm trên đường thẳng cố định.

Bài 13. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = 2 \\ mx - y = 1 \end{cases}$$

a) Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm (x,y) thỏa mãn $x > 0$ và $y < 0$.

b) Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 2x - y$ với (x,y) là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

Bài 14. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Tìm m để hệ có nghiệm (x,y) sao cho $H = x - y + 1$ có giá trị nhỏ nhất.

Bài 15. Giải và biện luận các hệ phương trình sau:

a)
$$\begin{cases} mx + 2y = 2m \\ x + y = 3 \end{cases}$$
 b)
$$\begin{cases} x - my = 0 \\ mx - y = m + 1 \end{cases}$$

Bài 16. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = 2 \\ mx - y = m \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình khi $m = -2$

b) Tìm giá trị nguyên của m để hệ có nghiệm nguyên duy nhất.

Bài 17. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ -ax + y = a \end{cases}$$

a) Chứng minh rằng hệ luôn luôn có nghiệm duy nhất với mọi a.

b) Tìm a để hệ có nghiệm (x,y) sao cho $x < 1$; $y < 1$.

Bài 18. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + 2y = m + 1 \\ 2x + my = 2m - 1 \end{cases}$$

Xác định m nguyên để hệ sau có nghiệm duy nhất (x; y) và x; y nguyên.

Bài 19. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3x - 2y = m \\ x + my = 3 \end{cases}$$

Xác định m để hệ có nghiệm thỏa mãn $x > 0$, $y > 0$.

Bài 20. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + (m - 4)y = 16 \\ (4 - m)x - 50y = 80 \end{cases}$$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình.
 b) Trong trường hợp hệ có nghiệm duy nhất. Hãy tìm m để $x + y > 1$.

Bài 21. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + (m-1)y = 2 \\ (1+m)x - y = m+1 \end{cases}$$

- a) Giải hệ phương trình khi $m = \frac{1}{2}$
 b) Xác định giá trị của m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) thỏa mãn điều kiện $x > y$

Bài 22. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (2m+1)x + y = 2m-2 \\ m^2x - y = m^2 - 3m \end{cases}$$

Trong đó $m \in \mathbb{Z}; m \neq 1$. Xác định m để hệ phương trình có nghiệm nguyên.

Bài 23. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 1 \\ -ax + y = 3 \\ |x+1| + y = 2 \end{cases}$$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.
 b) Tìm các số nguyên m để hệ có nghiệm (x; y) là số nguyên.
 c) Tìm các giá trị của m để hệ phương trình có nghiệm dương duy nhất.

Bài 24. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + my = m+1 \\ mx + y = 3m-1 \end{cases}$$

- a) Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m.
 b) Trong trường hợp có nghiệm duy nhất, tìm các giá trị của m để tích x.y nhỏ nhất.

Bài 25. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4x - 4y + 2z = 1 \\ 8x + 4y + z = 8 \end{cases}$$

- a) Biểu thị x và y theo z.
 b) Tìm GTNN và GTLN của thức $A = x + y - z$.

Bài 26. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2a + 3b = 5 \\ 3a - 4c = 6 \end{cases}$$

Bài 27. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} -ax + y = 3 \\ |x+1| + y = 2 \end{cases}$$

- a) Giải hệ phương trình với $a = 2$
 b) Tìm các giá trị của a để hệ có nghiệm duy nhất.

Bài 28. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x - my = 3m-1 \\ 2x - y = m+5 \end{cases}$$

Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hệ có nghiệm duy nhất (x; y) mà

$S = x^2 + y^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 29. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} mx + 2my = m + 1 \\ mx + (m + 1)y = 1 \end{cases}$$

- Chứng minh rằng nếu hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ thì điểm $M(x; y)$ luôn thuộc một đường thẳng khi m thay đổi.
- Xác định m để điểm M thuộc góc phần tư thứ nhất.

Bài 30. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + 2y = 1 \end{cases}$$

- Giải và biện luận hệ phương trình theo tham số m .
- Tìm số nguyên m để hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$ với x, y là các số nguyên.
- Chứng minh rằng khi hệ có nghiệm duy nhất $(x; y)$, điểm $M(x, y)$ luôn luôn chạy trên một đường thẳng cố định.

Bài 31. Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + ay = 1 \\ ax + y = 1 \end{cases}$$

- Giải hệ phương trình khi $a = 2$.
- Với giá trị nào của a thì hệ có nghiệm duy nhất.

CHUYÊN ĐỀ 4. GIẢI BÀI TOÁN BẰNG CÁCH LẬP HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

A. Lý thuyết

Các bước giải bài toán bằng cách lập hệ phương trình.

Bước 1: Lập hệ phương trình

- Chọn ẩn số (ghi rõ đơn vị) và đặt điều kiện cho ẩn;
- Biểu diễn các đại lượng chưa biết theo ẩn và các đại lượng đã biết;
- Lập các phương trình biểu thị mối quan hệ giữa các đại lượng.

Bước 2: Giải hệ phương trình

Bước 3: Kết luận (Kiểm tra xem trong các nghiệm của hệ phương trình, nghiệm nào thỏa mãn điều kiện của ẩn, nghiệm nào không rồi kết luận).

B. Bài tập

Dạng 1. Giải bài toán làm chung, làm riêng

Bài 1. Hai người thợ cùng làm một công việc. Nếu làm riêng rẽ, mỗi người nửa việc thì tổng số giờ làm việc là 12h30. Nếu hai người cùng làm thì hai người chỉ làm

- việc đó trong 6 giờ. Như vậy, làm việc riêng rẽ cả công việc mỗi người mất bao nhiêu thời gian ?
- Bài 2.** Hai vòi nước chảy cùng vào 1 bể không có nước thì trong 6 giờ đầy bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ, vòi thứ 2 chảy trong 3 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy bao lâu thì sẽ đầy bể?
- Bài 3.** Hai tổ cùng làm chung công việc trong 12 giờ thì xong, nhưng hai tổ cùng làm trong 4 giờ thì tổ (I) được điều đi làm việc khác, tổ (II) làm nốt trong 10 giờ thì xong công việc. Hỏi mỗi tổ làm riêng thì trong bao lâu xong việc.
- Bài 4.** Hai vòi nước cùng chảy vào 1 bồn không có nước. Nếu vòi 1 chảy trong 3h rồi dừng lại, sau đó vòi 2 chảy tiếp trong 8h nữa thì đầy bồn. Nếu cho vòi 1 chảy vào bồn không có nước trong 1h, rồi cho cả 2 vòi chảy tiếp trong 4h nữa thì số nước chảy vào bằng $\frac{8}{9}$ bồn. Hỏi nếu chảy 1 mình thì mỗi vòi sẽ chảy trong bao lâu thì đầy bồn?
- Bài 5.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể cạn trong một giờ được $\frac{3}{10}$ bể. Nếu vòi thứ nhất chảy trong 3 giờ, vòi thứ hai chảy trong 2 giờ thì cả hai vòi chảy được $\frac{4}{5}$ bể. Tính thời gian mỗi vòi chảy một mình đầy bể ?
- Bài 6.** Hai tổ thanh niên tình nguyện cùng sửa một con đường vào bản trong 4 giờ thì xong. Nếu làm riêng thì tổ 1 làm nhanh hơn tổ 2 với thời gian 6 giờ. Hỏi mỗi đội làm một mình thì bao lâu sẽ xong việc ?
- Bài 7.** Theo kế hoạch hai tổ sản xuất 600 sản phẩm trong một thời gian nhất định. Do áp dụng kỹ thuật mới nên tổ I đã sản xuất vượt mức kế hoạch là 18% và tổ II vượt mức 21%. Vì vậy, trong thời gian quy định họ đã hoàn thành vượt mức 120 sản phẩm. Hỏi số sản phẩm được giao của mỗi tổ là bao nhiêu ?
- Bài 8.** Hai đội công nhân làm một đoạn đường. Đội 1 làm xong một nửa đoạn đường thì đội 2 đến làm tiếp nửa còn lại với thời gian dài hơn thời gian đội 1 đã làm là 30 ngày. Nếu hai đội cùng làm thì trong 72 ngày xong cả đoạn đường. Hỏi mỗi đội đã làm bao nhiêu ngày trên đoạn đường này ?
- Bài 9.** Hai đội công nhân trồng rừng phải hoàn thành kế hoạch trong cùng một thời gian. Đội 1 phải trồng 40 ha, đội 2 phải trồng 90 ha. Đội 1 hoàn thành công việc sớm hơn 2 ngày so với kế hoạch. Đội 2 hoàn thành muộn hơn 2 ngày so với kế hoạch. Nếu đội 1 làm công việc trong một thời gian bằng thời gian đội 2 đã làm và đội 2 làm trong thời gian bằng đội 1 đã làm thì diện tích trồng được của hai đội bằng nhau. Tính thời gian mỗi đội phải làm theo kế hoạch ?

- Bài 10.** Hai người thợ cùng làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được 25% công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó trong mấy giờ thì xong ?
- Bài 11.** Hai vòi nước cùng chảy vào một bể không chứa nước thì sau 6 giờ đầy bể . Nếu vòi thứ nhất chảy trong 2 giờ , vòi thứ 2 chảy trong 3 giờ thì được $\frac{2}{5}$ bể. Hỏi mỗi vòi chảy một mình trong bao lâu thì đầy bể ?
- Bài 12.** Hai người thợ cùng làm một công việc thì xong trong 18 giờ. Nếu người thứ nhất làm trong 4 giờ, người thứ hai làm trong 7 giờ thì được $\frac{1}{3}$ công việc. Hỏi mỗi người làm một mình thì mất bao lâu sẽ xong công việc ?
- Bài 13.** Để hoàn thành một công việc hai tổ phải làm trong 6 giờ. Sau 2 giờ làm chung thì tổ hai được điều đi làm việc khác. Tổ một đã hoàn thành công việc còn lại trong 10 giờ. Hỏi nếu mỗi tổ làm riêng thì bao lâu xong công việc đó?
- Bài 14.** Hai đội công nhân cùng đào một con mương. Nếu họ cùng làm thì trong 2 ngày sẽ xong công việc. Nếu làm riêng thì đội hai hoàn thành công việc nhanh hơn đội một là 3 ngày. Hỏi nếu làm riêng thì mỗi đội phải làm trong bao nhiêu ngày để xong công việc ?
- Bài 15.** Hai chiếc bình rỗng giống nhau có cùng dung tích là 375 lít. Mỗi bình có một vòi nước chảy vào và thể tích nước chảy trong một giờ là như nhau. Người ta mở cho hai vòi cùng chảy vào bình nhưng sau 2 giờ thì khoá vòi thứ hai lại và sau 45 phút mới tiếp tục mở lại. Để hai bình cùng đầy một lúc người ta phải tăng lưu lượng vòi thứ hai thêm 25 lít/giờ. Tính xem mỗi giờ vòi thứ nhất chảy được bao nhiêu lít nước.
- Bài 16.** Theo kế hoạch, một tổ công nhân phải sản xuất 300 sản phẩm trong một thời gian quy định. Đến khi làm việc mỗi ngày tổ sản xuất được nhiều hơn 6 sản phẩm so với kế hoạch, do đó hoàn thành trước 5 ngày so với thời hạn. Hỏi mỗi ngày theo kế hoạch tổ phải làm bao nhiêu sản phẩm? Biết rằng năng suất lao động của mỗi công nhân là như nhau.

Dạng 2. Giải bài toán chuyển động

- Bài 1.** Hai ô tô cùng xuất phát từ A đến B, ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai mỗi giờ 10 km nên đến B sớm hơn ô tô thứ hai 1 giờ. Tính vận tốc hai xe ô tô, biết quãng đường AB là 300 km.
- Bài 2.** Một ô tô khách và một ô tô tải cùng xuất phát từ địa điểm A đi đến địa điểm B đường dài 180 km do vận tốc của ô tô khách lớn hơn ô tô tải 10 km/h nên ô tô

khách đến B trước ô tô tải 36 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô, biết rằng trong quá trình đi từ A đến B vận tốc của mỗi ô tô không đổi.

- Bài 3.** Một xe lửa đi từ Huế ra Hà Nội. Sau đó 1 giờ 40 phút, một xe lửa khác đi từ Hà Nội vào Huế với vận tốc lớn hơn vận tốc của xe lửa thứ nhất là 5 km/h. Hai xe gặp nhau tại một ga cách Hà Nội 300 km. Tìm vận tốc của mỗi xe, giả thiết rằng quãng đường sắt Huế - Hà Nội dài 645 km ?
- Bài 4.** Quãng đường AB dài 270km. Hai ô tô cùng khởi hành một lúc từ A đi đến B. Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai 12km/giờ, nên đến B trước ô tô thứ hai 40 phút. Tìm vận tốc mỗi ô tô ?
- Bài 5.** Hai người đi bộ khởi hành cùng một lúc ở hai địa điểm A và B cách nhau 18km. Họ đi ngược chiều nhau và gặp nhau sau khi mỗi người đã đi được 2 giờ. Biết rằng cứ đi 1 km thì người đi từ A đi lâu hơn người đi từ B là 3 phút. Tính vận tốc của mỗi người ?

Dạng 3. Giải bài toán hình học

- Bài 1.** Một hình chữ nhật có đường chéo bằng 13 m, chiều dài hơn chiều rộng 7 m. Tính diện tích hình chữ nhật đó?
- Bài 2.** Một thửa ruộng hình chữ nhật có chu vi là 250 m. Tính diện tích của thửa ruộng biết rằng chiều dài giảm 3 lần và chiều rộng tăng 2 lần thì chu vi thửa ruộng không thay đổi
- Bài 3.** Một cái sân hình tam giác có diện tích 180 m^2 . Tính cạnh đáy của sân biết rằng nếu tăng cạnh đáy 4 m và giảm chiều cao tương ứng 1 m thì diện tích không đổi?
- Bài 4.** Một mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích là 720 m^2 , nếu tăng chiều dài thêm 6 m và giảm chiều rộng đi 4 m thì diện tích mảnh vườn không đổi. Tính kích thước (chiều dài và chiều rộng) của mảnh vườn.
- Bài 5.** Một miếng đất hình thang cân có chiều cao là 35 m hai đáy lần lượt bằng 30 m và 50 m người ta làm hai đoạn đường có cùng chiều rộng. Các tìm đường lần lượt là đường trung bình của hình thang và đoạn thẳng nối hai trung điểm của hai đáy. Tính chiều rộng đoạn đường đó, biết rằng diện tích phần làm đường bằng $\frac{1}{4}$ diện tích hình thang.

Dạng 4. Giải bài toán tìm số

- Bài 1.** Tìm hai số biết rằng 4 lần số thứ hai cộng với 5 lần số thứ nhất bằng 18040, và 3 lần số thứ nhất hơn 2 lần số thứ hai là 2002.

- Bài 2.** Tìm một số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng số đó gấp 4 lần tổng các chữ số của nó. Nếu viết hai chữ số của nó theo thứ tự ngược lại thì được số mới lớn hơn số ban đầu 36 đơn vị.
- Bài 3.** Tìm một số có hai chữ số. Biết rằng nếu viết thêm số 1 vào bên phải số này thì được một số có ba chữ số hơn số phải tìm 577 và số phải tìm hơn số đó nhưng viết theo thứ tự ngược lại là 18 đơn vị.
- Bài 4.** Tìm một số có hai chữ số, biết rằng tổng hai chữ số của nó nhỏ hơn số đó 6 lần và thêm 25 vào tích của hai chữ số đó sẽ được số viết theo thứ tự ngược lại với số phải tìm.
- Bài 5.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng hai lần chữ số hàng chục lớn hơn chữ số hàng đơn vị là 3. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được số mới có hai chữ số lớn hơn số ban đầu là 9.
- Bài 6.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn 3 lần chữ số hàng đơn vị là 8. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được số mới có hai chữ số nhỏ hơn số ban đầu là 35.
- Bài 7.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng 2 lần chữ số hàng chục lớn hơn 5 lần chữ số hàng đơn vị là 1 và chữ số hàng chục chia cho chữ số hàng đơn vị có thương là 2 và dư 2.
- Bài 8.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được số mới có hai chữ số lớn hơn số ban đầu là 63 và tổng của số mới và số ban đầu bằng 99.
- Bài 9.** Tìm hai số tự nhiên, biết rằng tổng của chúng bằng 1006 và số lớn chia cho số nhỏ có thương là 2 và dư 124.
- Bài 10.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 6. Nếu đổi chỗ hai chữ số cho nhau ta được số mới có hai chữ số nhỏ hơn số ban đầu là 18.
- Bài 11.** Tìm số tự nhiên có hai chữ số, biết rằng tổng chữ số hàng chục và chữ số hàng đơn vị bằng 4. Tổng các bình phương của hai chữ số bằng 80.

Dạng 5. Một số dạng toán khác

- Bài 1.** Một phòng họp có 240 ghế được xếp thành các dãy có số ghế bằng nhau. Nếu mỗi dãy bớt đi một ghế thì phải xếp thêm 20 dãy mới hết số ghế. Hỏi phòng họp lúc đầu được xếp thành bao nhiêu dãy ghế.
- Bài 2.** Hai giá sách có 400 cuốn sách. Nếu chuyển từ giá thứ nhất sang giá thứ hai 30 cuốn thì số sách ở giá thứ nhất bằng $\frac{3}{5}$ số sách ở giá thứ hai. Tính số sách ban đầu của mỗi ngăn?

- Bài 3.** Người ta trồng 35 cây dừa trên một thửa đất hình chữ nhật có chiều dài 30 m chiều rộng là 20 m thành những hàng song song cách đều nhau theo cả hai chiều. Hàng cây ngoài cùng trồng ngay trên biên của thửa đất. Hãy tính khoảng cách giữa hai hàng liên tiếp ?
- Bài 4.** Hai lớp 9A và 9B có 80 học sinh. Trong đợt góp sách ủng hộ, mỗi em lớp 9A góp 2 quyển và lớp 9B góp 3 quyển nên cả hai lớp góp được 198 quyển sách. Tìm số học sinh mỗi lớp ?
- Bài 5.** Hai người nông dân mang 100 quả trứng ra chợ bán. Số trứng của hai người không bằng nhau nhưng số tiền thu được của hai người lại bằng nhau. Một người nói với người kia: “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh thì tôi bán được 15 đồng”. Người kia nói “Nếu số trứng của tôi bằng số trứng của anh tôi chỉ bán được $6\frac{2}{3}$ đồng thôi”. Hỏi mỗi người có bao nhiêu quả trứng?
- Bài 6.** Người ta trộn 8g chất lỏng này với 6g chất lỏng khác có khối lượng riêng nhỏ hơn nó là $0,2 \text{ g/cm}^3$ để được hỗn hợp có khối lượng riêng $0,7 \text{ g/cm}^3$. Tìm khối lượng riêng của mỗi chất lỏng.

CHUYÊN ĐỀ 5. HÀM SỐ $Y = A.X^2$

A. Lý thuyết

1. Đồ thị hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$) là một Parabol đi qua gốc tọa độ nhận trục Oy làm trục đối xứng.
 - Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành, O là điểm thấp nhất của đồ thị
 - Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành, O là điểm cao nhất của đồ thị
2. Quan hệ giữa Parabol $y = ax^2$ ($a \neq 0$) và đường thẳng $y = mx + n$ ($m \neq 0$)
 - Tọa độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của hệ phương trình $a.x^2 = mx+n$ và $y = ax^2$.
 - Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình $a.x^2 = mx+n$.
 - Số giao điểm của (P) và (d) là số nghiệm của phương trình. Khi đó, xảy ra các trường hợp:
 - Nếu phương trình vô nghiệm thì (P) và (d) không có điểm chung;
 - Nếu phương trình có nghiệm kép thì (P) và (d) tiếp xúc nhau;
 - Nếu phương trình có hai nghiệm phân biệt thì (P) và (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

B. Bài tập

Bài 1.

- Vẽ đồ thị (P) của hàm số $y = -\frac{x^2}{4}$.
- Tính giá trị của hàm số $f(1)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(2)$ và $f(-2)$.
- Bằng phép tính tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng (d): $x - 2y = 4$.

Bài 2. Cho hàm số $y = \frac{-1}{4}x^2$ có đồ thị là (P) và hàm số $y - x = m$ có đồ thị là (d).

- Vẽ đồ thị của (P)
- Tìm điểm A có tung độ bằng -4 thuộc vào đồ thị hàm số.
- Tìm điểm B có hoành độ bằng 2 thuộc đồ thị hàm số.
- Tìm giao điểm của đồ thị hàm số (P) với các trục tọa độ Ox, Oy.
- Tìm m sao cho đồ thị (P) và đồ thị (d) cắt nhau tại điểm B có hoành độ là 2.

Bài 3. Cho parabol $y = 2x^2$ (P)

- Tìm hoành độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y = 3x - 1$.
- Tìm tọa độ giao điểm của (P) với đường thẳng $y = 6x - 4$.
- Tìm giá trị của a, b sao cho đường thẳng $y = a.x + b$ tiếp xúc với (P) và đi qua A (0; -2).

Bài 4. Cho hàm số (P): $y = x^2$ và hai điểm A (0;1) ; B (1;3).

- Vẽ đồ thị hàm số (P)
- Trong các điểm sau, điểm nào thuộc đồ thị hàm số C (-1; 1) ; D (2; 5) và E (-2; 4)
- Viết phương trình đường thẳng AB. Tìm tọa độ giao điểm AB với (P) đã cho.

Bài 5. Cho (P): $y = x^2$ và hai đường thẳng (d₁), (d₂) có phương trình lần lượt là

$$(d_1) \quad y = 2x - 5$$

$$(d_2) \quad y = 2x + m$$

- Chứng tỏ rằng đường thẳng (d₁) không cắt (P).
- Tìm điểm m để đường thẳng (d₂) cắt đồ thị (P) tại điểm M (2; 2).
- Với giá trị m vừa tìm được, hãy vẽ đồ thị (P) và (d₂) trên cùng hệ trục tọa độ Oxy.

CHUYÊN ĐỀ 6. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI MỘT ẨN

A. Lý thuyết

1. Công thức nghiệm

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta = b^2 - 4ac$

- Nếu $\Delta < 0$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $\Delta = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$
- Nếu $\Delta > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. Công thức nghiệm thu gọn

Phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có biệt thức $\Delta' = b'^2 - ac$ ($b = 2b'$)

- Nếu $\Delta' < 0$ thì phương trình vô nghiệm
- Nếu $\Delta' = 0$ thì phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$
- Nếu $\Delta' > 0$ thì phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; \quad x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

3. Hệ thức Vi - ét

a) Định lí Vi-ét

Nếu $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

b) Ứng dụng

- **Hệ quả 1:** Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a + b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a}$
- **Hệ quả 2:** Nếu phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) có $a - b + c = 0$ thì phương trình có nghiệm: $x_1 = -1; x_2 = \frac{-c}{a}$

c) Định lí (Vi - ét đảo)

Nếu hai số $x_1; x_2$ có $x_1 + x_2 = S; x_1 \cdot x_2 = P$ thì $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình $x^2 - S \cdot x + P = 0$ ($x_1; x_2$ tồn tại khi $S^2 - 4P \geq 0$)

B. Bài tập

Dạng 1. Giải các phương trình bậc 2

Bài 1. Giải các phương trình

a) $x^2 - 49x - 50 = 0$

f) $x^2 - (1 + \sqrt{2})x + \sqrt{2} = 0$

b) $3x^2 - 7x - 10 = 0$

g) $\sqrt{3}x^2 - (1 - \sqrt{3})x - 1 = 0$

c) $x^2 - 3x + 2 = 0$

h) $(2 + \sqrt{3})x^2 - 2\sqrt{3}x - 2 + \sqrt{3} = 0$

d) $x^2 - 4x - 5 = 0$

i) $(2 - \sqrt{3})x^2 + 2\sqrt{3}x - 2 - \sqrt{3} = 0$

e) $3x^2 - 2\sqrt{3}x - 3 = 0$

Bài 2. Giải các phương trình sau (phương trình quy về phương trình bậc hai)

a) $x^3 + 3x^2 - 2x - 6 = 0$;

c) $\frac{2x}{x+1} = \frac{x^2 - x + 8}{(x+1)(x-4)}$

b) $5x^4 + 2x^2 - 16 = 10 - x^2$;

d) $3(x^2+x) - 2(x^2+x) - 1 = 0$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$

g) $(x^2 - 4x + 2)^2 + x^2 - 4x - 4 = 0$

b) $(x^2 + 2x - 5)^2 = (x^2 - x + 5)^2$

h) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 4\left(x + \frac{1}{x}\right) + 3 = 0$

c) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

d) $0,3x^4 + 1,8x^2 + 1,5 = 0$

i) $\frac{x+2}{x-5} + 3 = \frac{6}{2-x}$

e) $x^3 + 2x^2 - (x-3)^2 = (x-1)(x^2-2)$

f) $\frac{x}{x+1} - 10 \cdot \frac{x+1}{x} = 3$

Bài 4. Cho phương trình $x^2 + \sqrt{3}x - \sqrt{5} = 0$ có 2 nghiệm là x_1 và x_2 .

Không giải phương trình hãy tính giá trị của biểu thức sau:

$$A = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2}; \quad B = x_1^2 + x_2^2; \quad C = \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_2^2}; \quad D = x_1^3 + x_2^3$$

Dạng 2. Giải và biện luận các phương trình bậc 2

Bài 1. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - 3 - m = 0$

- Chứng tỏ rằng phương trình có nghiệm x_1, x_2 với mọi m
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm cùng âm
- Tìm m sao cho nghiệm số x_1, x_2 của phương trình thoả mãn $x_1^2 + x_2^2 \geq 10$.
- Tìm hệ thức liên hệ giữa x_1 và x_2 không phụ thuộc vào m
- Hãy biểu thị x_1 qua x_2

Bài 2. Cho phương trình: $x^2 + 2x + m - 1 = 0$ (m là tham số)

- Tìm m để phương trình có hai nghiệm là nghịch đảo của nhau.
- Tìm m để phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$ thoả mãn $3x_1 + 2x_2 = 1$
- Lập phương trình ẩn y thoả mãn $y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}; y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$ với $x_1; x_2$ là nghiệm của phương trình ở trên.

Bài 3. Cho phương trình: $(m-1)x^2 + 2(m-1)x - m = 0$ (ẩn x)

- a) Định m để phương trình có nghiệm kép. Tính nghiệm kép này
- b) Định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt đều âm.

Bài 4. Cho phương trình: $x^2 - 4x + m + 1 = 0$

- a) Tìm m để phương trình có nghiệm.
- b) Tìm m sao cho phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 = 10$

Bài 5. Cho phương trình: $x^2 - (2m - 3)x + m^2 - 3m = 0$

- a) Chứng minh phương trình luôn luôn có hai nghiệm khi m thay đổi.
- b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $1 < x_1 < x_2 < 6$

Bài 6. Cho đường thẳng $d_1: y = (m+1).x + 2$ và đường thẳng $d_2: y = 2x + 1$.

- a) Xác định tọa độ giao điểm của 2 đường thẳng trên theo m ?
- b) Tìm m sao cho d_1 và d_2 cắt nhau tại một điểm mà hoành độ và tung độ của điểm đó trái dấu ?

Bài 7. Cho Parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$ và đường thẳng (d): $y = x - m + 3$. Tìm m để d và P

cắt nhau tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_2 = 3x_1$.

Bài 8. Cho 2 đường thẳng $d_1: y = (m+1).x + 1$ và $d_2: y = 2x + 2$.

- a) Xác định tọa độ của chúng theo m
- b) Tìm m để 2 đường thẳng trên cắt nhau tại 1 điểm sao cho hoành độ và tung độ của điểm đó cùng dấu.

Bài 9. Cho phương trình $x^2 - mx + m + 1 = 0$

- a) Giải phương trình khi $m = 3$
- b) Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn: $x_2 = 2x_1$.

Bài 10. Cho 3 đường thẳng $d_1: y = x + 2$; $d_2: y = 2.x + 1$; $d_3: y = (m^2 + 1).x + m$.

- a) Tìm m để $d_2 // d_3$
- b) Tìm m để 3 đường thẳng trên cắt nhau tại 1 điểm.

Bài 11. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx + m + 1$

- a) Tìm m để d cắt P tại hai điểm phân biệt A và B
- b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B. Tìm m sao cho $|x_1 - x_2| = 2$

Bài 12. Cho Parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = mx - 2$.

- a) Chứng minh rằng với mọi giá trị của m thì (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- b) Gọi x_1 và x_2 là hoành độ của A và B. Tìm m sao cho: $x_1^2 . x_2 + x_2^2 . x_1 = 2014$.

Bài 13. Cho hàm số $y = -\frac{1}{2}x^2$ có đồ thị là đường parabol (P), đường thẳng (d) có hệ số góc k đi qua điểm (0; 2).

- a) Viết phương trình đường thẳng d
- b) Chứng minh rằng khi k thay đổi thì (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 14. Cho hàm số $y = x^2$ có đồ thị là đường (P), đường thẳng d: $y = -mx - m + 1$. Tìm m để d và P cắt nhau tại A và B phân biệt mà $y_A + y_B$ nhỏ nhất.

Bài 15. Cho 3 đường thẳng $(d_1): y = mx - m + 1$; $(d_2): y = 2x + 3$ và $(d_3): y = x + 1$.

- Chứng minh khi m thay đổi thì d_1 luôn đi qua một điểm cố định.
- Tìm m để 3 đường thẳng cắt nhau tại 1 điểm.

Bài 16. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + m + 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt bên phải trục tung.

Bài 17.

- Chứng minh rằng đường thẳng (d): $y = mx - 1$ luôn cắt đường cong (P): $y = -x^2$ tại hai điểm phân biệt A($x_1; y_1$) và B($x_2; y_2$)
- Tìm m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = -4$

Bài 18. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x - m + 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt nằm ở hai phía của trục tung.

Bài 19. Cho hàm số $y = \frac{-1}{2}x^2$ có đồ thị là đường parabol (P), đường thẳng có hệ số góc k đi qua điểm (0; -2).

- Viết phương trình đường thẳng d
- Chứng minh rằng khi k thay đổi, (d) luôn cắt (P) tại 2 điểm phân biệt.

Bài 20. Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = -mx - m + 1$. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt mà tổng các tung độ của nó nhỏ nhất ?

Bài 21. Cho 3 đường thẳng $(d_1): y = x + 3$; $(d_2): y = -x + 1$ và $(d_3): y = \sqrt{3}x - m - 2$. Tìm m để 3 đường thẳng trên đồng quy.

Bài 22. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = x + 2$.

- Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B.
- Tính diện tích tam giác OAB.

Bài 23. Cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = (2m + 2)x - m^2 - 2m$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm có hoành độ x_1 và x_2 sao cho $2x_1 + x_2 = 5$.

Bài 24. Cho các hàm số $y = 2x - 2$ và $y = (m+1)x - m^2 - m$ (m khác 1)

- Vẽ đồ thị các hàm số khi $m = -2$
- Tìm m để đồ thị hai hàm số trên là các đường thẳng song song.

Bài 25. Cho đường thẳng (d): $2(m - 1)x + (m - 2)y = 2$

- Vẽ đường thẳng (d) với $m = \frac{1}{2}$
- Chứng minh rằng (d) luôn đi qua một điểm cố định với mọi m.
- Tìm m để (d) cách gốc tọa độ một khoảng lớn nhất.

Bài 26. Cho (P) : $y = mx^2$ (m khác 0) và (d) : $y = 2(m - 2)x - m + 3$. Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ trái dấu.

Bài 27. Cho (P) : $y = x^2$ (m khác 0) và (d) : $y = 2x + m$

- Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng hệ tọa độ khi $m = 3$ và tìm tọa độ giao điểm.
- Tìm m để (d) tiếp xúc (P), xác định tọa độ giao điểm.

Bài 28. Cho (P) : $y = -\frac{1}{2}x^2$ và (d) : $y = -\frac{1}{2}x + 2$

- Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng hệ tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.
- Gọi A và B là giao của hai đồ thị trên. Hãy tính diện tích tam giác OAB.

Bài 29. Cho (P) : $y = \frac{1}{2}x^2$ và (d) : $y = 2x - 2$

- Chứng minh rằng (d) tiếp xúc (P)
- Vẽ đồ thị hai hàm số trên cùng hệ tọa độ và tìm tọa độ giao điểm của chúng.
- Viết phương trình đường thẳng (d') vuông góc với (d) và tiếp xúc với (P).

Bài 30. Cho phương trình $x^2 - 2x - m + 3 = 0$ (m là tham số).

- Tìm m để phương trình có nghiệm x_1, x_2 .
- Tính tổng và tích hai nghiệm của phương trình trên theo m.
- Tính giá trị nhỏ nhất của $A = x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 - 7x_1x_2$ và giá trị của m tương ứng.

Bài 31. Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x - m = 0$

- Chứng minh rằng phương trình luôn luôn có 2 nghiệm x_1, x_2 với mọi m.
- Xác định m thỏa mãn phương trình $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = 0$.

Dạng 3. Giải bài toán bằng cách lập phương trình bậc 2

Bài 1. Một chiếc thuyền khởi hành từ bến sông A, sau 5 giờ 20 phút một Ca nô chạy từ bến sông A đuổi theo và gặp thuyền cách bến A 20 km. Hỏi vận tốc của thuyền, biết rằng Ca nô chạy nhanh hơn thuyền 12 km/h.

Bài 2. Quãng đường AB dài 270 km. Hai Ô tô khởi hành cùng một lúc đi từ A đến B. Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn Ô tô thứ hai 12 km/h nên đến trước Ô tô thứ hai 40 phút. Tính vận tốc của mỗi Ô tô.

Bài 3. Một Tàu thủy chạy trên một khúc sông dài 80 km, cả đi và về mất 8 giờ 20 phút. Tính vận tốc của Tàu thủy khi nước yên lặng, biết rằng vận tốc của dòng nước là 4 km/h.

Bài 4. Hai Ô tô khởi hành cùng một lúc từ địa điểm A đến địa điểm B dài 240 km. Mỗi giờ Ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn Ô tô thứ hai 12 km/h nên đến địa điểm B trước Ô tô thứ hai là 100 phút. Tính vận tốc của mỗi ô tô.

Bài 5. Trong dịp kỷ niệm 57 năm ngày thành lập nước CHXHCN Việt Nam 180 học sinh được điều về thăm quan diễu hành, người ta tính. Nếu dùng loại xe lớn chuyên chở một lượt hết số học sinh thì phải điều động ít hơn dùng loại xe nhỏ là 2 chiếc. Biết rằng mỗi ghế ngồi 1 học sinh và mỗi xe lớn nhiều hơn xe nhỏ là 15 chỗ ngồi. Tính số xe lớn, nếu loại xe đó được huy động.

Bài 6. Hai tổ sản xuất được giao làm 800 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, tổ I vượt mức 10%, tổ II vượt mức 20% nên cả hai tổ đã làm được 910 sản phẩm. Tính số sản phẩm mỗi tổ phải làm theo kế hoạch ?

Bài 7. Một phòng họp có 150 người, được sắp xếp ngồi đều trên các dãy ghế. Nếu có thêm 71 người thì phải kê thêm hai dãy ghế và mỗi dãy ghế phải bố trí thêm 3 người nữa. Hỏi lúc đầu phòng họp có bao nhiêu dãy ghế?

Bài 8. Một đội sản xuất phải làm 1000 sản phẩm trong một thời gian quy định. Nhờ tăng năng suất lao động, mỗi ngày đội làm thêm được 10 sản phẩm so với kế hoạch. Vì vậy, chẳng những đã làm vượt mức kế hoạch 80 sản phẩm mà còn hoàn thành công việc sớm hơn 2 ngày so với quy định. Tính số sản phẩm mà đội sản xuất phải làm trong một ngày theo kế hoạch ?

Bài 9. Một phòng họp có 360 ghế ngồi được xếp thành từng dãy và số ghế của từng dãy đều như nhau. Nếu số dãy tăng thêm 1 và số ghế của mỗi dãy tăng thêm 1, thì trong phòng có 400 ghế. Hỏi trong phòng họp có bao nhiêu dãy ghế, mỗi dãy có bao nhiêu ghế.

Bài 10. Một đội xe phải chở 168 tấn thóc. Nếu tăng thêm 6 xe và chở thêm 12 tấn thóc thì mỗi xe chở nhẹ hơn lúc đầu là 1 tấn. Hỏi lúc đầu mỗi đội có bao nhiêu xe.

Bài 11. Một đội công nhân hoàn thành một công việc với mức 420 ngày công. Hãy tính số công nhân của đội, biết rằng nếu đội tăng thêm 5 người thì số ngày để hoàn thành công việc sẽ giảm đi 7 ngày.

Bài 12. Một người đi từ tỉnh A đến tỉnh B cách nhau 78 km. Sau đó 1 giờ người thứ hai đi từ tỉnh B đến tỉnh A hai người gặp nhau tại địa điểm C cách B 36 km. Tính thời gian mỗi người đã đi từ lúc khởi hành đến lúc gặp nhau, biết vận tốc người thứ hai lớn hơn vận tốc người thứ nhất là 4 km/h.

Bài 13. Một khu vườn hình chữ nhật có chu vi 280 m. Người ta làm một lối đi xung quanh vườn (thuộc đất vườn) rộng 2 m, diện tích còn lại để trồng trọt là 4256 m². Tính kích thước (các cạnh) của khu vườn đó.

Bài 14. Tìm hai số biết tổng bằng 19 và tổng các bình phương của chúng bằng 185.

PHẦN HÌNH HỌC

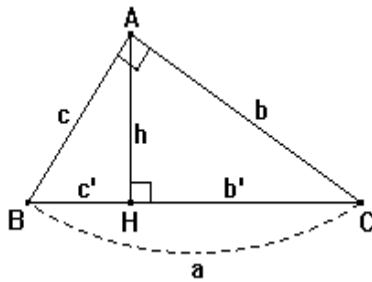
CHUYÊN ĐỀ 1. HỆ THỨC LƯỢNG, TỈ SỐ LƯỢNG GIÁC

TRONG TAM GIÁC VUÔNG

A. Lý thuyết

1. Các hệ thức về cạnh và đường cao trong tam giác vuông.

Cho ΔABC vuông tại A, đường cao AH.



$$1) b^2 = a \cdot b' \qquad 2) h^2 = b' \cdot c'$$

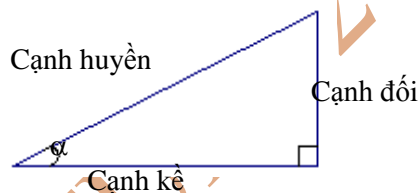
$$c^2 = a \cdot c' \qquad 3) a \cdot h = b \cdot c$$

$$4) \frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

$$5) a^2 = b^2 + c^2 \text{ (Định lí Pythagore)}$$

2. Tỉ số lượng giác của góc nhọn

a) Định nghĩa các tỉ số lượng giác của góc nhọn



$$\sin \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh huyền}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{cạnh đối}}{\text{cạnh kề}}$$

$$\cot \alpha = \frac{\text{cạnh kề}}{\text{cạnh đối}}$$

b) Một số tính chất của các tỉ số lượng giác

- Cho hai góc α và β phụ nhau.

$$\sin \alpha = \cos \beta$$

$$\cos \alpha = \sin \beta$$

$$\tan \alpha = \cot \beta$$

$$\cot \alpha = \tan \beta$$

- Cho góc nhọn α .

$$0 < \sin \alpha < 1$$

$$0 < \cos \alpha < 1$$

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

B. Bài tập

Dạng 1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông

Bài 1. Cho ΔABC vuông tại A, biết $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{7}$. Đường cao $AH = 15\text{cm}$. Tính HB, HC.

Bài 2. Cho ΔABC vuông tại A, $AB = 12\text{cm}$, $AC = 16\text{cm}$, phân giác AD, đường cao AH. Tính HD, HB, HC.

Bài 3. Cho ΔABC vuông tại A, kẻ đường cao AH. Tính chu vi ΔABC , biết

$$AH = 14\text{cm}, \frac{HB}{HC} = \frac{1}{4}.$$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Biết $AB = 20\text{cm}$, $HC = 9\text{cm}$. Tính độ dài AH.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A có BD là phân giác góc B. Biết rằng $AD = 1\text{cm}$; $BD = \sqrt{10}\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh BC.

Bài 6. Cho tam giác ABC có $AB > AC$, kẻ trung tuyến AM và đường cao AH. Chứng minh:

a) $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$

b) $AB^2 - AC^2 = 2BC.MH$

Bài 7. Cho hình thang ABCD ($AB // CD$) có $AB = 3\text{cm}$; $CD = 14\text{cm}$; $AC = 15\text{cm}$; $BD = 8\text{cm}$.

a) Chứng minh AC vuông góc với BD

b) Tính diện tích hình thang

Bài 8. Tính diện tích hình bình hành ABCD biết $AD = 12$; $DC = 15$; $\angle ADC = 70^\circ$

Bài 9. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến BD. Gọi I là hình chiếu của C trên BD, H là hình chiếu của I trên AC. Chứng minh: $AH = 3HI$.

Bài 10. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh bằng a, vẽ một đường thẳng cắt BC ở E và cắt đường thẳng DC ở F.

Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2}$

Dạng 2. Tỷ số lượng giác trong tam giác vuông

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB = 4\text{cm}$; $BC = 6\text{ cm}$. Tính các tỷ số lượng giác (TSLG) của góc B và góc C.

Bài 2. Chứng minh rằng $\sin \alpha < \text{tg} \alpha$ và $\cos \alpha < \text{cotg} \alpha$.

Hướng dẫn:

Xét tam giác ABC vuông tại A, $B = \alpha$, $\sin B = \frac{AC}{BC}$; $\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB}$

Vì $BC > AC$ nên $\frac{AC}{BC} < \frac{AC}{AB} \rightarrow \sin \alpha < \operatorname{tg} \alpha$

Chứng minh tương tự $\rightarrow \cos \alpha < \operatorname{cotg} \alpha$.

Bài 5. Tính

- a) Biết $\sin \alpha = \frac{5}{13}$, hãy tính $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$.
- b) Biết $\operatorname{tg} \alpha = \frac{12}{35}$, hãy tính $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{cotg} \alpha$.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $BH = 64\text{cm}$ và $CH = 81\text{cm}$. Tính các cạnh và góc tam giác ABC.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A. Tìm các tỉ số lượng giác của góc B khi:

- a) $BC = 5\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$.
- b) $BC = 13\text{ cm}$, $AC = 12\text{ cm}$.
- c) $AC = 4\text{cm}$, $AB = 3\text{cm}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC vuông tại A, có $AB = 10\text{cm}$ và $AC = 15\text{cm}$.

- a) Tính góc B.
- b) Phân giác trong góc B cắt AC tại I. Tính AI.
- c) Vẽ $AH \perp BI$ tại H. Tính AH.

Dạng 3. Hệ thức quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác vuông

Bài 1. Giải tam giác vuông ABC, biết $A = 90^\circ$ và:

- a) $a = 15\text{cm}$; $b = 10\text{cm}$
- b) $b = 12\text{cm}$; $c = 7\text{cm}$

Bài 2. Cho tam giác ABC có $B = 60^\circ$, $C = 50^\circ$, $AC = 35\text{cm}$. Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 3. Cho tứ giác ABCD có $A = D = 90^\circ$, $C = 40^\circ$, $AB = 4\text{cm}$, $AD = 3\text{cm}$. Tính diện tích tứ giác.

Bài 4. Cho tứ giác ABCD có các đường chéo cắt nhau tại O. Cho biết $AC = 4\text{cm}$, $BD = 5\text{cm}$, $AOB = 50^\circ$. Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 5. Chứng minh rằng:

- a) Diện tích của một tam giác bằng nửa tích của hai cạnh nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.
- b) Diện tích của một hình bình hành bằng tích của hai cạnh kề nhân với sin của góc nhọn tạo bởi các đường thẳng chứa hai cạnh ấy.

Bài tập tổng hợp

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại A, $BC = 3\sqrt{5}$ cm. Hình vuông ADEF cạnh bằng 2 cm, có $D \in AB, E \in BC, F \in AC$. Biết $AB > AC$ và $S_{ADEF} = \frac{4}{9} S_{ABC}$. Tính AB ; AC.

Bài 2. Cho tam giác ABC vuông cân tại A, trung tuyến BD. Gọi I là hình chiếu của C trên BD, H là hình chiếu của I trên AC. Chứng minh: $AH = 3HI$.

Bài 3. Cho tam giác ABC có $AB = 21m, AC = 28m, BC = 35m$.

- a) Chứng minh tam giác ABC vuông. b) Tính $\sin B, \sin C$.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, đường phân giác AD. Cho biết $HB = 112, HC = 63$.

- a) Tính độ dài AH. b) Tính độ dài AD.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 5, CH = 6$.

- a) Tính AB, AC, BC, BH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 6. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Biết $AH = 16, BH = 25$.

- a) Tính AB, AC, BC, CH. b) Tính diện tích tam giác ABC.

Bài 7. Cho hình thang ABCD có $A = D = 90^\circ$ và hai đường chéo vuông góc với nhau tại O.

- a) Chứng minh hình thang này có chiều cao bằng trung bình nhân của hai đáy.
 b) Cho $AB = 9, CD = 16$. Tính diện tích hình thang ABCD.
 c) Tính độ dài các đoạn thẳng OA, OB, OC, OD.

Bài 8. Tính diện tích hình thang ABCD ($AB \parallel CD$), biết $AB = 10, CD = 27, AC = 12, BD = 35$.

Bài 9. Cho biết chu vi của một tam giác bằng 120cm. Độ dài các cạnh tỉ lệ với 8, 15, 17.

- a) Chứng minh rằng tam giác đó là một tam giác vuông.
 b) Tính khoảng cách từ giao điểm ba đường phân giác đến mỗi cạnh.

Bài 10. Qua đỉnh A của hình vuông ABCD cạnh bằng a, vẽ đường thẳng cắt BC ở E

và cắt đường thẳng DC ở F. Chứng minh: $\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{a^2}$

Bài 11. Cho hình thang ABCD có $B = C = 90^\circ$. Hai đường chéo vuông góc với nhau tại H. Biết $AB = 3\sqrt{5}$ cm, $HA = 3$ cm. Chứng minh:

- a) $HA : HB : HC : HD = 1 : 2 : 4 : 8$

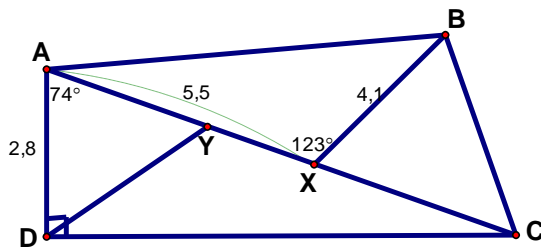
- b) $\frac{1}{AB^2} - \frac{1}{CD^2} = \frac{1}{HB^2} - \frac{1}{HC^2}$

Bài 12. Cho ΔABC nhọn, đường cao AD và BE . Gọi $I \in AD$ và $Q \in BE$ sao cho $BIC = AQC = 90^\circ$.

- Chứng minh: $CA.CE = CD.CB$
- Chứng minh: ΔIQC là tam giác cân
- BI cắt AQ tại K . Chứng minh: $CK \perp IQ$

Bài 13. Cho ΔABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $AC = 12\text{cm}$, $BC = 15\text{cm}$.

- Tính HA , HB , HC .
- Gọi E , F là hình chiếu vuông góc của H lần lượt lên AB , AC . Chứng minh: $AE.AB = AF.AC$
- Chứng minh: $HE^2 + HF^2 = HB.HC$

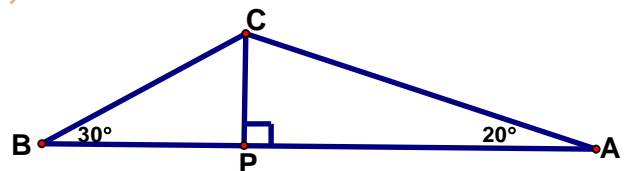


Bài 14. Cho hình vẽ:

- Tính AC
- Gọi Y là điểm trên AX sao cho $DY \parallel BX$. Hãy tính XY .
- Tính diện tích tam giác BCX .

Bài 15. Cho hình vẽ dưới đây biết $BC = 6\text{ cm}$. Đường vuông góc kẻ từ C đến AB cắt AB tại P . Tính:

- AP ; BP
- CP và diện tích tam giác ABC .



Bài 16. Cho tam giác ABC có $AB = 24\text{cm}$; $AC = 18\text{cm}$; $BC = 30\text{cm}$

- Tính đường cao AH , số đo góc B và C .
- Phân giác của góc A cắt BC tại D . Tính BD , CD .
- Từ D kẻ DE và DF lần lượt vuông góc với AB và AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Tính chu vi và diện tích tứ giác $AEDF$.

Bài 17. Tam giác ABC vuông tại A , $AB = a$, $AC = 3a$. Trên AC lấy các điểm D và E sao cho $AD = DE = EC$.

- Chứng minh $\frac{DE}{DB} = \frac{DB}{DC}$
- Chứng minh ΔBDE đồng dạng với ΔCDB .
- Tính tổng $\angle AEB + \angle BCD$

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, $C = 30^\circ$, $BC = 10$ cm.

- Tính AB, AC.
- Từ A kẻ AM, AN lần lượt vuông góc với các đường phân giác trong và ngoài của góc. Chứng minh $MN \parallel BC$ và $MN = AB$.
- Chứng minh hai tam giác MAB và ABC đồng dạng. Tìm tỉ số đồng dạng.

Bài 19. Cho tam giác ABC cân, $AB = AC = 10$ cm; $BC = 16$ cm. Trên đường cao AH lấy điểm I sao cho $AI = \frac{1}{3}AH$. Vẽ tia Cx song song với AH, Cx cắt tia BI tại D.

- Tính các góc của tam giác ABC.
- Tính diện tích tứ giác ABCD.

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông tại A. Qua A vẽ đường thẳng d vuông góc với trung tuyến AM. Các tia phân giác của các góc AMB; AMC cắt đường thẳng d lần lượt tại D và E. Chứng minh:

- Tứ giác BCED là hình thang
- $BD \cdot CE = \frac{BC^2}{4}$
- Giả sử $AC = 2AB$, chứng minh $EC = BC$

Bài 21. Cho hình thang cân có đường chéo vuông góc với cạnh bên. Tính chu vi và diện tích hình thang cân đó biết đáy nhỏ bằng 14 cm, đáy lớn bằng 50 cm.

Bài 22. Cho ΔABC có $AB=6$ cm ; $AC=8$ cm ; $BC=10$ cm

- Chứng minh ΔABC vuông
- Tính số đo góc B và C
- Đường phân giác của góc A cắt BC tại D. Tính BD, DC
- Từ D kẻ $DE \perp AB$, $DF \perp AC$. Tứ giác AEDF là hình gì? tính chu vi và diện tích của tứ giác AEDF.

CHUYÊN ĐỀ 2. ĐƯỜNG TRÒN

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa và các tính chất cơ bản của đường tròn

- Tập hợp các điểm cách đều điểm O cho trước một khoảng không đổi R gọi là đường tròn tâm O bán kính R, kí hiệu là (O,R) .
- Một đường tròn hoàn toàn xác định bởi một bởi một điều kiện của nó. Nếu AB là đoạn cho trước thì đường tròn đường kính AB là tập hợp những điểm M sao cho góc $AMB = 90^\circ$. Khi đó tâm O sẽ là trung điểm của AB, còn bán kính thì bằng $R = \frac{AB}{2}$.

- Qua 3 điểm A, B, C không thẳng hàng luôn vẽ được 1 đường tròn và chỉ một mà thôi. Đường tròn đó được gọi là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.
- Trong một đường tròn, đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm dây đó. Ngược lại, đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây đó.
- Trong đường tròn hai dây cung bằng nhau khi và chỉ khi chúng cách đều tâm.
- Trong một đường tròn, hai dây cung không bằng nhau; dây lớn hơn khi và chỉ khi dây đó gần tâm hơn.

2. Tiếp tuyến của đường tròn

Định nghĩa: Đường thẳng được gọi là tiếp tuyến của đường tròn nếu nó có một điểm chung với đường tròn. Điểm đó được gọi là tiếp điểm.

Tính chất:

- Tiếp tuyến của đường tròn vuông góc với bán kính tại tiếp điểm. Ngược lại, đường thẳng vuông góc với bán kính tại giao điểm của bán kính với đường tròn được gọi là tiếp tuyến.
- Hai tiếp tuyến của một đường tròn cắt nhau tại một điểm thì điểm đó cách đều hai tiếp điểm; tia kẻ từ điểm đó đi qua tâm là tia phân giác của góc tạo bởi hai tiếp tuyến; tia kẻ từ tâm đi qua điểm đó là tia phân giác của góc tạo bởi hai bán kính đi qua các tiếp điểm.
- Đường tròn tiếp xúc với 3 cạnh của một tam giác gọi là đường tròn nội tiếp của tam giác đó. Tâm của đường tròn nội tiếp tam giác là giao của ba đường phân giác của tam giác.
- Đường tròn bàng tiếp của tam giác là đường tròn tiếp xúc với một cạnh và phần kéo dài của hai cạnh kia.

3. Vị trí tương đối của hai đường tròn

Giả sử hai đường tròn $(O;R)$ và $(O';r)$ có $R \geq r$ và $d = OO'$ là khoảng cách giữa hai tâm. Khi đó, mỗi vị trí tương đối giữa hai đường tròn ứng với một hệ thức giữa R, r và d theo bảng sau:

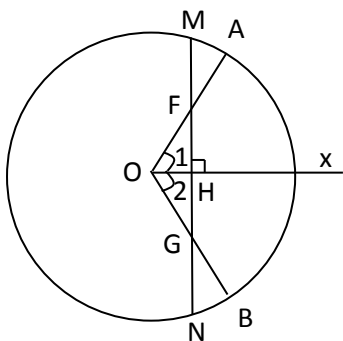
Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức
Hai đường tròn cắt nhau	2	$R - r < d < R + r$
Hai đường tròn tiếp xúc	1	$d = R + r$ ($d = R - r$)
Hai đường tròn không giao nhau	0	$d > R + r$ ($d < R - r$)

→ Hai đường tròn tiếp xúc nhau khi và chỉ khi tiếp điểm nằm trên đường nối tâm. Nếu hai đường tròn cắt nhau thì đường nối tâm vuông góc với dây chung và chia dây chung đó ra hai phần bằng nhau.

B. Bài tập

Dạng 1. Bài tập cơ bản về đường tròn

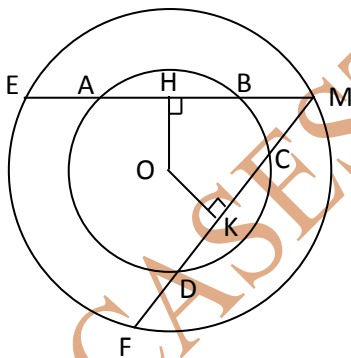
Bài 1. Trong đường tròn (O) kẻ hai bán kính OA và OB tùy ý và một dây MN vuông góc với phân giác Ox của góc AOB cắt OA ở F và OB ở G. Chứng tỏ rằng MF = NG và FA = GB .



Hướng dẫn:

- Sử dụng tính chất đường kính dây cung chứng minh $HM = HN$
- Chứng minh $\triangle OFG$ cân để $HF = HG; OF = OG$

Bài 2. Cho hai đường tròn đồng tâm như hình vẽ. So sánh các độ dài:



- OH và OK
- ME và MF
- CM và MK

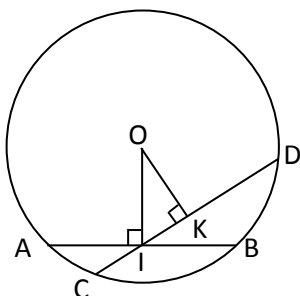
Nếu biết

- $AB > CD$
- $AB = CD$
- $AB < CD$

Bài 3. Cho (O) và điểm I nằm bên trong đường tròn. Chứng minh rằng dây AB vuông góc với OI tại I ngắn hơn mọi dây khác đi qua I.

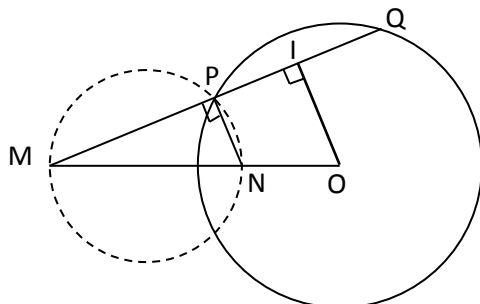
Hướng dẫn:

- Kẻ dây CD bất kì đi qua I không trùng với AB
- Kẻ OK vuông góc với CD
- Vì $OI > OK$ nên $AB < CD$



Bài 4. Cho $(O;R)$ và điểm M nằm ngoài đường tròn. Hãy dựng cát tuyến MPQ với đường tròn sao cho $MP = MQ$.

Hướng dẫn:



(O)

Phân tích: Giả sử dựng được hình thỏa mãn đề bài. Kẻ OI vuông góc với PQ .

$$\text{Ta có : } IP = \frac{1}{2}PQ \Rightarrow IP = \frac{1}{3}MI \Rightarrow MP = \frac{2}{3}MI$$

Kẻ PN vuông góc MQ ta thấy $MN = \frac{2}{3}MO$ và

P là giao của đường tròn đường kính MN và

Bài 5. Cho hình thoi $ABCD$ có $A = 60^\circ$. Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC, CD, DA . Chứng minh 6 điểm E, F, G, H, B, D cùng nằm trên một đường tròn.

Bài 6. Cho hình thoi $ABCD$, đường trung trực của cạnh AB cắt BD tại E và cắt AC tại F . Chứng minh E, F lần lượt là tâm của đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC và ABD .

Bài 7. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Vẽ đường tròn (I) đường kính OA . Bán kính OC của đường tròn (O) cắt đường tròn (I) tại D . Vẽ $CH \perp AB$. Chứng minh tứ giác $ACDH$ là hình thang cân.

Bài 8. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD, AB < CD$) có $C = D = 60^\circ, CD = 2AD$. Chứng minh 4 điểm A, B, C, D cùng thuộc một đường tròn.

Bài 9. Cho hình thoi $ABCD$. Gọi O là giao điểm hai đường chéo. M, N, R và S lần lượt là hình chiếu của O trên AB, BC, CD và DA . Chứng minh 4 điểm M, N, R và S cùng thuộc một đường tròn.

Bài 10. Cho hai đường thẳng xy và $x'y'$ vuông góc nhau tại O . Một đoạn thẳng $AB = 6\text{cm}$ chuyển động sao cho A luôn nằm trên xy và B trên $x'y'$. Hỏi trung điểm M của AB chuyển động trên đường nào?

Dạng 2. Bài tập cơ bản về tiếp tuyến với đường tròn

Bài 1. Cho tam giác ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H .

- Chứng minh rằng bốn điểm A, D, H, E cùng nằm trên một đường tròn (gọi tâm của nó là O).
- Gọi M là trung điểm của BC . Chứng minh rằng ME là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

Bài 2. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Vẽ dây AC sao cho $CAB = 30^\circ$. Trên tia đối của tia BA , lấy điểm M sao cho $BM = R$. Chứng minh rằng:

- a) MC là tiếp tuyến của đường tròn (O) . b) $MC^2 = 3R^2$.

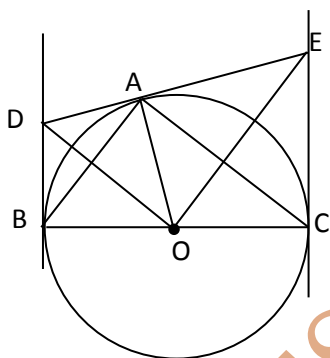
Bài 3. Cho tam giác ABC vuông ở A có $AB = 8$, $AC = 15$. Vẽ đường cao AH . Gọi D là điểm đối xứng với B qua H . Vẽ đường tròn đường kính CD , cắt AC ở E .

- a) Chứng minh rằng HE là tiếp tuyến của đường tròn.
b) Tính độ dài HE .

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC ; d là tiếp tuyến của đường tròn tại A . Các tiếp tuyến của đường tròn tại B và C cắt d theo thứ tự ở D và E .

- a) Tính góc DOE
b) Chứng minh $DE = BD + CE$
c) Chứng minh $BD.CE = R^2$ (R là bán kính đường tròn tâm O)
d) Chứng minh BC là tiếp tuyến của đường tròn có đường kính DE .

Hướng dẫn:



a) Sử dụng tính chất tiếp tuyến:

$$DOE = DOA + EOA = \frac{1}{2}(BOA + COA) = 90^\circ$$

b) Sử dụng tính chất tiếp tuyến:

$$DE = DA + EA = BD + EC$$

c) Sử dụng tính chất tiếp tuyến $\rightarrow BD.CE = DA.EA$.

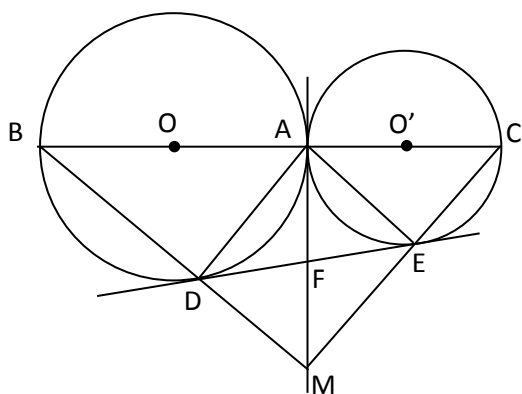
Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông cho tam giác $DOE \rightarrow DA.EA = OA^2 = R^2$

- d) Trung điểm I của DE là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác vuông DOE .
 OI là đường trung bình của hình thang vuông $BDEC$ nên $OI // BD // CE$
hay $OI \perp BC$ hay BC là tiếp tuyến đường tròn đường kính DE .

Bài 5. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ các đường kính AOB ; AOC' . Gọi DE là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn $D \in (O)$; $E \in (O')$. Gọi M là giao điểm của BD và CE .

- a) Tính số đo góc DAE
b) Tứ giác $ADME$ là hình gì?
c) Chứng minh rằng MA là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Hướng dẫn:



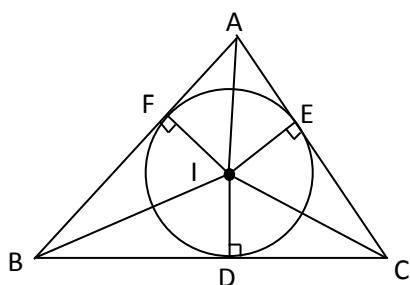
a) Kẻ tiếp tuyến chung của hai đường tròn đi qua A cắt tiếp tuyến chung DE ở F. Dựa vào tính chất tiếp tuyến ta có $FA = FD = FE$. Vậy tam giác DAE là tam giác vuông tại A hay góc $DAE = 90^\circ$.

b) Tứ giác ADME có $\hat{D} = \hat{A} = \hat{E} = 90^\circ$ nên nó là hình chữ nhật.

c) Từ câu b) AM đi qua trung điểm của

DE hay AM trùng với AF nên AM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn.

Bài 6. Gọi a, b, c là số đo 3 cạnh của tam giác ABC, r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác. Tính diện tích tam giác theo p và r, trong đó p là nửa chu vi tam giác.



Hướng dẫn:

Gọi D, E, F là các tiếp điểm.

Theo tính chất tiếp tuyến: $ID = IF = IE = r$.

$$S_{ABC} = S_{ABI} + S_{BCI} + S_{ACI} = \frac{1}{2} (a + b + c).r = pr$$

$$S = pr.$$

CHUYÊN ĐỀ 3. GÓC Ở TÂM - SỐ ĐO CUNG

A. Lý thuyết

- Góc ở tâm là góc có đỉnh là tâm của đường tròn.
- Góc này cắt đường tròn tại A và B khi đó cung AB là cung bị chắn của góc ở tâm AOB.
- Số đo cung bị chắn bằng số đo của góc ở tâm chắn cung đó.
- So sánh cung: cung nào lớn hơn thì có số đo cũng lớn hơn và ngược lại.
- Cung nào có góc ở tâm lớn hơn thì lớn hơn và ngược lại.

B. Bài tập

Bài 1. Cho $(O; 5\text{cm})$ và điểm M sao cho $OM=10\text{cm}$. Vẽ hai tiếp tuyến MA và MB. Tính góc ở tâm do hai tia OA và OB tạo ra.

Bài 2. Cho tam giác đều ABC, vẽ nửa đường tròn đường kính BC cắt AB tại D và AC tại E. So sánh các cung BD; DE và EC.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O; r)$ với $R > r$, điểm M ngoài $(O; R)$. Qua M vẽ hai tiếp tuyến với $(O; r)$, một cắt $(O; R)$ tại A và B (A nằm giữa M và B); một cắt $(O; R)$ tại C và D (C nằm giữa D và M). Chứng minh: hai cung AB và CD bằng nhau.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại hai điểm A, B . Dây AC của đường tròn (O) vuông góc với AO' ; dây AD của đường tròn (O') vuông góc với AO . So sánh các góc $AOC, AO'D$.

Bài 5. Trên một đường tròn (O) có cung AB bằng 140° . Gọi A', B' lần lượt là đối xứng của A, B qua O ; lấy cung AD nhận B' làm điểm chính giữa; lấy cung CB nhận A' làm điểm chính giữa. Tính số đo cung nhỏ CD .

Bài 6. Cho hai đường tròn bằng nhau $(O), (O')$ cắt nhau tại A, B . Kẻ các đường kính AOC và $AO'D$. Gọi E là giao điểm thứ hai của đường thẳng AC với (O') .

- So sánh các cung nhỏ CB, BD .
- Chứng minh rằng B là điểm chính giữa cung EBD .

Bài 7.

- Cho đường tròn (O, R) với hai điểm A, B . Tìm quỹ tích trung điểm của các dây trên đường tròn có độ dài bằng dây AB .
- Cho đường tròn (O, R) với hai tiếp tuyến AB, AC . Một tiếp tuyến di động của đường tròn (O) cắt các đoạn thẳng AB, AC tại các điểm tương ứng P, Q . Gọi P', Q' theo thứ tự là giao điểm của các đoạn thẳng OP, OQ với đường tròn (O) .
 - Chứng minh rằng cung nhỏ $P'Q'$ có số đo không đổi.
 - Tìm quỹ tích trung điểm I của $P'Q'$.

Bài 8. Cho đường tròn (O) , dây AB . Gọi M là điểm chính giữa cung AB . Vẽ dây MC cắt dây AB tại D . Vẽ đường vuông góc với AB tại D , cắt OC tại K . ΔKCD là tam giác gì ?

Bài 9. Cho M, N, P, Q là bốn điểm tùy ý trên đường tròn (O) . Các tiếp tuyến của (O) tại bốn điểm trên cắt nhau tạo thành tứ giác $ABCD$. Tính số đo tổng các góc $AOB + COD$?

Bài 10. Cho đường tròn (O) , dây AB . Trên dây AB lấy D rồi nối D với C trên đường tròn (C khác A, B ; A, O, C không thẳng hàng). Các đường trung trực của AD và DC cắt nhau ở M . CMR: đường thẳng MO đi qua điểm chính giữa cung AC .

Bài 11. Cho hai đường tròn đồng tâm $(O;R)$ và $(O;2R)$. P là một điểm ngoài $(O;2R)$. Vẽ đường tròn $(P;PO)$ cắt đường tròn $(O;2R)$ tại C và D , cắt đường tròn $(O;R)$ ở E và F . Đường thẳng OC và OD cắt $(O;R)$ ở A và B . Chứng minh rằng:

- $CD \parallel EF$.

b) PA và PB là hai tiếp tuyến của (O;R).

Bài 12. Cho hình thoi ABCD có cạnh $AB = 5$ cm và đường chéo $AC = 8$ cm. Đường tròn tâm A bán kính $R = 5$ cm tiếp xúc với đường tròn tâm C tại M thuộc đoạn AC. Đường tròn này cắt CB tại E và cắt CD tại F. Tính tỉ số độ dài của cung BD và cung EF .

Bài 13. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 40° .

a) Tính góc AOB.

b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N. Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

Bài 14. Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB. Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, cắt Ax và By lần lượt tại C và D.

a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.

b) Chứng minh: $MC \cdot MD = OM^2$.

c) Cho biết $OC = BA = 2R$, tính AC và BD theo R.

Bài 15. Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O). Biết $B = 65^\circ$; $C = 102^\circ$. Tính số đo các góc A và D.

Bài 16. Cho đường tròn (O) đường kính AB. Trên đường thẳng AB lấy một điểm M sao cho điểm B nằm giữa hai điểm A và M. Kẻ hai tiếp tuyến MN và MP với đường tròn (N, P là hai tiếp điểm).

a) Chứng minh tứ giác MNOP nội tiếp.

b) Gọi H là giao điểm của NP và AB. Chứng minh $NP \perp AB$.

c) Chứng minh $OH \cdot MH = AH \cdot BH$

CHUYÊN ĐỀ 4. GÓC NỘI TIẾP

A. Lý thuyết

- Góc nội tiếp của (O) là góc có đỉnh nằm trên đường tròn (O) và hai cạnh cắt (O) tại hai điểm phân biệt.
- Để có góc nội tiếp thường ta có ba điểm nằm trên đường tròn.
- Số đo góc nội tiếp chắn cung bằng $\frac{1}{2}$ số đo góc ở tâm cùng chắn cung đó. Chú ý là cùng một cung.
- Góc nội tiếp có số đo bằng $\frac{1}{2}$ số đo cung bị chắn.
- Cùng một cung có thể có nhiều góc nội tiếp thì các góc này đều bằng nhau.
- Đặc biệt góc nội tiếp chắn nửa đường tròn thì là góc vuông 90° .

- Các cung bằng nhau thì góc nội tiếp chắn cung đó cũng bằng nhau và ngược lại.
- Cung nào lớn hơn thì góc nội tiếp chắn cung đó cũng lớn hơn.

B. Bài tập

Bài 1. Cho (O) có hai bán kính OA và OB vuông góc. Lấy C trên (O) sao cho

$$\frac{sdAC}{sdBC} = \frac{4}{5}. \text{ Tính các góc của tam giác ABC.}$$

Bài 2. Cho tam giác ABC cân tại A và có góc A là 50° . Nửa đường tròn đường kính AC cắt AB tại D và BC tại H. Tính số đo các cung AD; DH và HC.

Bài 3. Cho (O) có đường kính AB vuông góc dây cung CD tại E. Chứng minh rằng: $CD^2 = 4AE \cdot BE$.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A, B. Qua A kẻ cát tuyến cắt các đường tròn (O), (O') tại các điểm thứ hai C, D. Tia DB cắt (O) tại điểm thứ hai là M. Các tia OB, BO' lần lượt cắt (O') tại các điểm thứ hai là N, P.

- a) So sánh hai góc ACB và BOO' .
- b) So sánh hai góc CAM và PAN .

Bài 5. Cho tam giác ABC nội tiếp (O), các đường cao AD, BE, CF đồng quy tại H. Các tia AD, BE, CF cắt (O) tại các điểm thứ hai tương ứng A', B', C'.

- a) Chứng minh rằng AB, BC, CA là trung trực của các đoạn thẳng tương ứng HC', HA', HB'.
- b) Chứng minh rằng H là tâm đường tròn nội tiếp tam giác DEF.

Bài 6. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc với nhau tại A. Qua A vẽ một cát tuyến cắt (O) tại B, cắt (O') tại C. Một cát tuyến thứ hai qua A cắt (O) tại D, cắt (O') tại E. Chứng minh rằng $CE \parallel BD$.

Bài 7. Cho nửa đường tròn đường kính AB. Gọi O là điểm chính giữa cung \widehat{AB} và M là một điểm bất kì của nửa đường tròn đó. Tia AM cắt đường tròn (O;OA) tại điểm thứ hai là N. Chứng minh rằng $MN = MB$.

Bài 8. Cho đường tròn tâm O đường kính AB và một điểm C chạy trên một nửa đường tròn. Vẽ đường tròn (I) tiếp xúc với (O) tại C và tiếp xúc với đường kính AB tại D, đường tròn này cắt CA, CB lần lượt tại các điểm thứ hai là M, N. Chứng minh rằng:

- a) Ba điểm M, I, N thẳng hàng.
- b) $ID \perp MN$.

Bài 9. Cho (O), đường kính AB, điểm D thuộc đường tròn. Gọi E là điểm đối xứng với A qua D.

- a) Tam giác ABE là tam giác gì ?
- b) Gọi K là giao điểm của EB với (O). Chứng minh rằng $OD \perp AK$.

Bài 10. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau ở A, B, O nằm trên (O') . Dây AC của (O) cắt (O') ở D , dây OE của (O') cắt (O) ở F . Chứng minh rằng:

- a) $OD \perp BC$.
- b) Điểm F cách đều ba cạnh của tam giác ABE .

Bài 11. Cho hai đường thẳng song song. Một đường tròn tiếp xúc với một đường thẳng tại A và cắt đường thẳng kia tại B, C . Trên đường tròn lấy một điểm D (không trùng A, B, C). Chứng minh rằng A cách đều hai đường thẳng BD và CD .

Bài 12. MA và MB là hai tiếp tuyến của (O) . Vẽ đường tròn $(M; MA)$, C là một điểm nằm trên cung AB của (M) (cung AB nằm trong đường tròn (O)). Tia AC, BC cắt (O) ở P, Q . Chứng minh rằng: P và Q đối xứng với nhau qua O .

Bài 13. Trên cạnh CD của hình vuông $ABCD$ ta lấy một điểm M khác C, D . Các đường tròn đường kính CD và AM cắt nhau tại điểm thứ hai N (khác D). Tia DN cắt BC tại P . Chứng minh rằng: $AC \perp PM$.

Bài 14. Từ một điểm A ở ngoài đường tròn $(O; R)$, vẽ hai tiếp tuyến AB, AC với đường tròn. Đường thẳng vuông góc với OB tại O cắt AC tại N . Đường thẳng vuông góc với OC tại O cắt AB tại M .

- a) Chứng minh rằng tứ giác $AMON$ là hình thoi.
- b) Điểm A phải cách điểm O một khoảng bao nhiêu để cho MN là tiếp tuyến của (O) .

Bài tập tổng hợp

Bài 1. Từ điểm M ở ngoài đường tròn (O) , vẽ hai tiếp tuyến MA và MB (A, B là tiếp điểm). Cho biết góc AMB bằng 40° .

- a) Tính góc AOB .
- b) Từ O kẻ đường thẳng vuông góc với OA cắt MB tại N . Chứng minh tam giác OMN là tam giác cân.

Bài 2. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính AB . Kẻ các tiếp tuyến Ax, By cùng phía với nửa đường tròn đối với AB . Từ điểm M trên nửa đường tròn kẻ tiếp tuyến thứ ba với đường tròn, nó cắt Ax và By lần lượt tại C và D .

- a) Chứng minh: Tam giác COD là tam giác vuông.
- b) Chứng minh: $MC \cdot MD = OM^2$.
- c) Cho biết $OC = BA = 2R$, tính AC và BD theo R .

Bài 3. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài với nhau tại B . Vẽ đường kính AB của đường tròn (O) và đường kính BC của đường tròn (O') . Đường tròn đường kính OC cắt (O) tại M và N .

- a) Đường thẳng CM cắt (O') tại P . Chứng minh: $OM \parallel BP$.

- b) Từ C kẻ đường thẳng vuông góc với CM cắt tia ON tại D.
- c) Chứng minh: Tam giác OCD là tam giác cân.

Bài 4. Cho hai đường tròn (O,R) và (O',R') cắt nhau tại A và B sao cho đường thẳng OA là tiếp tuyến của đường tròn (O',R') . Biết $R = 12\text{cm}$, $R' = 5\text{cm}$.

- a) Chứng minh: $O'A$ là tiếp tuyến của đường tròn (O,R) .
- b) Tính độ dài các đoạn thẳng OO' , AB .

Bài 5. Cho đường tròn tâm O bán kính $R = 6\text{cm}$ và một điểm A cách O một khoảng 10cm . Từ A vẽ tiếp tuyến AB (B là tiếp điểm).

- a) Tính độ dài đoạn tiếp tuyến AB.
- b) Vẽ cát tuyến ACD, gọi I là trung điểm của đoạn CD. Hỏi khi C chạy trên đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào?

Bài 6. Cho hai đường tròn đồng tâm (O,R) và (O,r) . Dây AB của (O,R) tiếp xúc với (O,r) . Trên tia AB lấy điểm E sao cho B là trung điểm của đoạn AE. Từ E vẽ tiếp tuyến thứ hai của (O,r) cắt (O,R) tại C và D (D ở giữa E và C).

- a) Chứng minh: $EA = EC$.
- b) Chứng minh: EO vuông góc với BD.
- c) Điểm E chạy trên đường nào khi dây AB của (O,R) thay đổi nhưng luôn tiếp xúc với (O,r) ?

Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB và một điểm M nằm trên nửa đường tròn đó. H là chân đường vuông góc hạ từ M xuống AB.

- a) Khi $AH=2\text{cm}$, $MH=4\text{cm}$. Hãy tính độ dài các đoạn thẳng: AB, MA, MB.
- b) Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O). Hãy xác định vị trí của M để biểu thức: $\frac{1}{MA^2} + \frac{1}{MB^2}$ có giá trị nhỏ nhất.
- c) Tiếp tuyến của (O) tại M cắt tiếp tuyến của (O) tại A ở D, OD cắt AM tại I. Khi điểm M di động trên nửa đường tròn (O) thì I chạy trên đường nào?

Bài 8. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) đường kính AD. Gọi H là trực tâm của tam giác.

- a) Tính số đo góc ABD
- b) Tứ giác BHCD là hình gì? Tại sao?
- c) Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh $2OM = AH$.

Bài 9. Cho tam giác ABC cân tại A nội tiếp đường tròn (O). Đường cao AH cắt đường tròn ở điểm D.

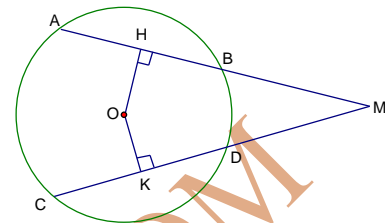
- a) AD có phải là đường kính của đường tròn (O) không? Tại sao?
- b) Chứng minh: $BC^2 = 4AH \cdot DH$
- c) Cho $BC = 24\text{cm}$, $AB = 20\text{cm}$. Tính bán kính của đường tròn (O).

Bài 10. Cho đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi H là trung điểm OA. Dây CD vuông góc với OA tại H.

- Tứ giác ACOD là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh các tam giác OAC và CBD là các tam giác đều.
- Gọi M là trung điểm BC. Chứng minh ba điểm D, O, M thẳng hàng.
- Chứng minh đẳng thức $CD^2 = 4 AH \cdot HB$.

Bài 11. Hình bên cho biết $AB = CD$. Chứng minh rằng:

- $MH = MK$.
- $MB = MD$.
- Chứng minh tứ giác ABDC là hình thang cân.



Bài 12. Cho đường tròn đường kính 10 cm, một đường thẳng d cách tâm O một khoảng bằng 3 cm.

- Xác định vị trí tương đối của đường thẳng d và đường tròn (O).
- Đường thẳng d cắt đường tròn (O) tại điểm A và B. Tính độ dài dây AB.
- Kẻ đường kính AC của đường tròn (O). Tính độ dài BC và số đo \widehat{CAB} (làm tròn đến độ).
- Tiếp tuyến của đường tròn (O) tại C cắt tia AB tại M. Tính độ dài BM.

Bài 13. Cho tam giác ABC nhọn, đường tròn đường kính BC cắt AB ở N và cắt AC ở M. Gọi H là giao điểm của BM và CN.

- Tính số đo các góc BMC và BNC.
- Chứng minh AH vuông góc BC.
- Chứng minh tiếp tuyến tại N đi qua trung điểm AH.

Bài 14. Cho đường tròn tâm (O;R) đường kính AB và điểm M trên đường tròn sao cho $\widehat{MAB} = 60^\circ$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại H.

- Chứng minh AM và AN là các tiếp tuyến của đường tròn (B; BM)
- Chứng minh $MN^2 = 4 AH \cdot HB$
- Chứng minh tam giác BMN là tam giác đều và điểm O là trọng tâm của nó.
- Tia MO cắt đường tròn (O) tại E, tia MB cắt (B) tại F. Chứng minh ba điểm N; E; F thẳng hàng.

Bài 15. Cho đường tròn (O) và điểm A cách O một khoảng bằng $2R$, kẻ tiếp tuyến AB tới đường tròn (B là tiếp điểm).

- Tính số đo các góc của tam giác OAB.
- Gọi C là điểm đối xứng với B qua OA. Chứng minh điểm C nằm trên đường tròn O và AC là tiếp tuyến của đường tròn (O).
- AO cắt đường tròn (O) tại G. Chứng minh G là trọng tâm tam giác ABC.

Bài 16. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O;R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là hai tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của OA và BC.

- Chứng minh $OA \perp BC$ và tính OH. OA theo R
- Kẻ đường kính BD của đường tròn (O). Chứng minh $CD \parallel OA$.
- Gọi E là hình chiếu của C trên BD, K là giao điểm của AD và CE. Chứng minh K là trung điểm CE.

Bài 17. Từ điểm A ở ngoài đường tròn (O; R) kẻ hai tiếp tuyến AB, AC (với B và C là các tiếp điểm). Kẻ $BE \perp AC$ và $CF \perp AB$ ($E \in AC, F \in AB$), BE và CF cắt nhau tại H.

- Chứng minh tứ giác BOCH là hình thoi.
- Chứng minh ba điểm A, H, O thẳng hàng.
- Xác định vị trí điểm A để H nằm trên đường tròn (O).

Bài 18. Cho đường tròn (O ; 3cm) và điểm A có $OA = 6$ cm. Kẻ các tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm).Gọi H là giao điểm của OA và BC

- Tính độ dài OH.
- Qua điểm M bất kì thuộc cung nhỏ BC , kẻ tiếp tuyến với đường tròn, cắt AB và AC theo thứ tự tại E và F. Tính chu vi tam giác ADE.
- Tính số đo góc DOE.

Bài 19. Cho nửa đường tròn tâm O đường kính AB. Gọi Ax , By là các tia vuông góc với AB(Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Qua điểm M bất kì thuộc tia Ax kẻ tiếp tuyến với nửa đường tròn, cắt By ở N.

- Tính số đo góc MON.
- Chứng minh $MN = AM + BN$.
- Tính tích AM. BN theo R.

Bài 20. Cho tam giác ABC vuông ở A, đường cao AH. Gọi D và E lần lượt là hình chiếu của điểm H trên các cạnh AB và AC.

- Chứng minh $AD \cdot AB = AE \cdot AC$
- Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BH và CH. Chứng minh DE là tiếp tuyến chung của hai đường tròn (M; MD) và (N; NE).
- Gọi P là trung điểm MN, Q là giao điểm của DE và AH. Giả sử $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm. Tính độ dài PQ.

Bài 21. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A. Gọi CD là tiếp tuyến chung ngoài của hai đường tròn (với $C \in (O)$ và $D \in (O')$).

- Tính số đo góc CAD.
- Tính độ dài CD biết $OA = 4,5$ cm, $O'A = 2$ cm.

Bài 22. Cho hai đường tròn (O) và (O') tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài MN với M thuộc (O) và N thuộc (O') . Gọi P là điểm đối xứng với M qua OO' , Q là điểm đối xứng với N qua OO' . Chứng minh rằng:

- $MNQP$ là hình thang cân.
- PQ là tiếp tuyến chung của của hai đường tròn (O) và (O') .
 $MN + PQ = MP + NQ$.

CHUYÊN ĐỀ 5. TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. Lý thuyết

1) Định nghĩa

Tứ giác nội tiếp trong một đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn.

2) Dấu hiệu nhận biết

Tứ giác nội tiếp được trong một đường tròn:

- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối bằng thì tứ giác đó nội tiếp được trong một đường tròn.
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối của đỉnh đó thì nội tiếp được trong một đường tròn.
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc (an-pha) thì nội tiếp được trong một đường tròn.

3) Phương pháp chứng minh

Chứng minh tứ giác nội tiếp một đường tròn theo một trong các cách sau đây:

- Chứng minh tổng hai góc đối diện trong một tứ giác bằng 180° .
- Chứng minh hai điểm nhìn hai điểm còn lại dưới cùng một góc .
- Tứ giác $ABCD$ có AC cắt BD tại M mà $MA \cdot MC = MB \cdot MD$ thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp.
- Tứ giác có hai cạnh bên AB và CD giao nhau tại M mà $MA \cdot MB = MC \cdot MD$ thì tứ giác $ABCD$ nội tiếp.

B. Bài tập

Bài 1. Cho ΔABC vuông ở A . Trên AC lấy điểm M và vẽ đường tròn đường kính MC . Kẻ BM cắt đường tròn tại D . Đường thẳng DA cắt Đường tròn tại S . Chứng minh rằng:

a) Tứ giác ABCD nội tiếp.

a) $ABD = ACD$

b) CA là phân giác của SCB

Bài 2. Cho tứ giác ABCD nội tiếp nửa đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC và BD cắt nhau tại E. Vẽ EF vuông góc với AD. Chứng minh:

a) Tứ giác ABEF, tứ giác DCEF nội tiếp .

b) CA là phân giác của BCF .

c) Gọi M là trung điểm của DE. Chứng minh tứ giác BCMF nội tiếp

Bài 3. Tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn đường kính AD. Hai đường chéo AC, BD cắt nhau tại E. Hình chiếu vuông góc của E trên AD là F. Đường thẳng CF cắt đường tròn tại điểm thứ hai là M. Giao điểm của BD và CF là N. Chứng minh:

a) CEFD là tứ giác nội tiếp.

b) Tia FA là tia phân giác của góc BFM.

c) $BE \cdot DN = EN \cdot BD$

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông ở A và một điểm D nằm giữa A và B. Đường tròn đường kính BD cắt BC tại E. Các đường thẳng CD, AE lần lượt cắt đường tròn tại các điểm thứ hai F, G. Chứng minh:

a) Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EBD.

b) Tứ giác ADEC và AFBC nội tiếp được trong một đường tròn.

c) AC song song với FG.

d) Các đường thẳng AC, DE và BF đồng quy.

Bài 5. Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^\circ$; $AB > AC$) và một điểm M nằm trên đoạn AC (M không trùng với A và C). Gọi N và D lần lượt là giao điểm thứ hai của BC và MB với đường tròn đường kính MC; gọi S là giao điểm thứ hai giữa AD với đường tròn đường kính MC; T là giao điểm của MN và AB. Chứng minh:

a) Bốn điểm A, M, N và B cùng thuộc một đường tròn.

b) CM là phân giác của góc BCS .

c) $\frac{TA}{TD} = \frac{TC}{TB}$.

Bài 6. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn. Qua A dựng hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (M, N là các tiếp điểm) và một cát tuyến bất kì cắt đường tròn tại P, Q. Gọi L là trung điểm của PQ.

a) Chứng minh 5 điểm: O; L; M; A; N cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh LA là phân giác của MLN

c) Gọi I là giao điểm của MN và LA. Chứng minh $MA^2 = AI \cdot AL$

- d) Gọi K là giao điểm của ML với (O). Chứng minh rằng $KN \parallel AQ$.
- e) Chứng minh $\triangle KLN$ cân.

Bài 7. Cho đường tròn (O;R) tiếp xúc với đường thẳng d tại A. Trên d lấy điểm H không trùng với điểm A và $AH < R$. Qua H kẻ đường thẳng vuông góc với d, đường thẳng này cắt đường tròn tại hai điểm E và B (E nằm giữa B và H).

- a) Chứng minh góc ABE bằng góc EAH và $\triangle ABH$ đồng dạng với $\triangle EAH$.
- b) Lấy điểm C trên d sao cho H là trung điểm của đoạn AC, đường thẳng CE cắt AB tại K. Chứng minh AHEK là tứ giác nội tiếp.
- c) Xác định vị trí điểm H để $AB = R\sqrt{3}$.

Bài 8. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H và cắt đường tròn (O) lần lượt tại M,N,P. Chứng minh rằng:

- a) Các tứ giác AEHF, BFHD nội tiếp.
- b) Bốn điểm B, C, E, F cùng nằm trên một đường tròn.
- c) $AE.AC = AH.AD$; $AD.BC = BE.AC$.
- d) H và M đối xứng nhau qua BC.
- e) Xác định tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$.

Bài 9. Cho $\triangle ABC$ không cân, đường cao AH, nội tiếp trong đường tròn tâm O. Gọi E, F thứ tự là hình chiếu của B, C lên đường kính AD của đường tròn (O) và M, N thứ tự là trung điểm của BC, AB. Chứng minh:

- a) Bốn điểm A, B, H, E cùng nằm trên đường tròn tâm N và $HE \parallel CD$.
- b) M là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle HEF$.

Bài 10. Cho đường tròn tâm O và điểm A ở bên ngoài đường tròn. Vẽ các tiếp tuyến AB, AC và cát tuyến ADE với đường tròn (B và C là các tiếp điểm). Gọi H là trung điểm của DE.

- a) Chứng minh rằng: A, B, H, O, C cùng thuộc một đường tròn. Xác định tâm của đường tròn này.
- b) Chứng minh: HA là tia phân giác BHC .
- c) Gọi I là giao điểm của BC và DE. Chứng minh: $AB^2 = AI.AH$
- d) BH cắt (O) tại K. Chứng minh: $AE \parallel CK$.

Bài 11. Từ một điểm S ở ngoài đường tròn (O) vẽ hai tiếp tuyến SA, SB và cát tuyến SCD của đường tròn đó.

- a) Gọi E là trung điểm của dây CD. Chứng minh 5 điểm S, A, E, O, B cùng thuộc một đường tròn.
- b) Nếu $SA = AO$ thì $\triangle SAOB$ là hình gì? vì sao?
- c) Chứng minh rằng: $AC.BD = BC.DA = \frac{AB.CD}{2}$

Bài 12. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Kẻ tiếp tuyến Bx và lấy hai điểm C và D thuộc nửa đường tròn. Các tia AC và AD cắt Bx lần lượt ở E, F (F ở giữa B và E).

- Chứng minh $AC \cdot AE$ không đổi.
- Chứng minh $\angle ABD = \angle DFB$.
- Chứng minh rằng $CEFD$ là tứ giác nội tiếp.

Bài 13. Trên đường thẳng d lấy ba điểm A, B, C theo thứ tự đó. Trên nửa mặt phẳng bờ d kẻ hai tia Ax, By cùng vuông góc với đường thẳng. Trên tia Ax lấy I . Tia vuông góc với CI tại C cắt By tại K . Đường tròn đường kính IC cắt IK tại P .

- Chứng minh tứ giác $CBPK$ nội tiếp được đường tròn.
- Chứng minh $AI \cdot BK = AC \cdot CB$
- Giả sử A, B, I cố định hãy xác định vị trí điểm C sao cho diện tích hình thang vuông $ABKI$ lớn nhất.

Bài 14. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A . Kẻ đường cao AH , vẽ đường tròn đường kính AH , đường tròn này cắt AB tại E , cắt AC tại F .

- Chứng minh $AEHF$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh: $BEFC$ là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh: $AB \cdot AE = AC \cdot AF$
- Gọi M là là giao điểm của CE và BF . Hãy so sánh diện tích của tứ giác $AEMF$ và diện tích của tam giác BMC .

Bài 15. Cho tam giác cân ABC ($AB = AC$), các đường cao AD, BE cắt nhau tại H . Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AHE$.

- Chứng minh tứ giác $CEHD$ nội tiếp.
- Bốn điểm A, E, D, B cùng nằm trên một đường tròn.
- Chứng minh $ED = \frac{1}{2} BC$.
- Chứng minh DE là tiếp tuyến của đường tròn (O) .
- Tính độ dài DE biết $DH = 2 \text{ cm}$, $AH = 6 \text{ cm}$.

Bài 16. Từ điểm M ngoài đường tròn (O) vẽ 2 tiếp tuyến MA và MB . Trên cung nhỏ AB lấy điểm C . Vẽ $CD \perp AB$; $CE \perp MA$; $CF \perp MB$. Gọi I là giao điểm của AC và DE ; K là giao điểm của BC và DF . Chứng minh rằng:

- Tứ giác $AECD$; $BKFD$ là tứ giác nội tiếp.
- $CD^2 = CE \cdot CF$
- $IK \perp CD$

Bài 17. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm di động trên cung nhỏ BC . Trên đoạn thẳng MA lấy điểm D sao cho $MD = MC$.

- a) Chứng minh $\triangle DMC$ đều.
- b) Chứng minh $MB + MC = MA$.
- c) Chứng minh tứ giác $ADOC$ nội tiếp.
- d) Khi M Di động trên cung nhỏ BC thì D di động trên đường cố định nào ?

Bài 18. Cho đường tròn $(O; R)$, từ một điểm A trên (O) kẻ tiếp tuyến d với (O) . Trên đường thẳng d lấy điểm M bất kì (M khác A) kẻ cát tuyến MNP và gọi K là trung điểm của NP , kẻ tiếp tuyến MB (B là tiếp điểm). Kẻ $AC \perp MB$, $BD \perp MA$ gọi H là giao điểm của AC và BD , I là giao điểm của OM và AB .

- a) Chứng minh tứ giác $AMBO$ nội tiếp.
- b) Chứng minh năm điểm O, K, A, M, B cùng nằm trên một đường tròn .
- c) Chứng minh $OI \cdot OM = R^2$; $OI \cdot IM = IA^2$.
- d) Chứng minh $OAHB$ là hình thoi.
- e) Chứng minh ba điểm O, H, M thẳng hàng.
- f) Tìm quỹ tích của điểm H khi M di chuyển trên đường thẳng d .

Bài 19. Cho 3 điểm $A; B; C$ cố định thẳng hàng theo thứ tự. Vẽ đường tròn (O) bất kỳ đi qua B và C (BC không là đường kính của (O)). Kẻ từ các tiếp tuyến AE và AF đến (O) ($E; F$ là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC ; K là trung điểm của EF , giao điểm của FI với (O) là D . Chứng minh:

- a) $AE^2 = AB \cdot AC$
- b) Tứ giác $AEOF$ nội tiếp
- c) Năm điểm $A; E; O; I; F$ cùng nằm trên một đường tròn.
- d) ED song song với Ac .
- e) Khi (O) thay đổi tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OIK luôn thuộc một đường thẳng cố định.

Bài 20. Cho $\triangle ABC$ có các góc đều nhọn và $A = 45^\circ$. Vẽ đường cao BD và CE của $\triangle ABC$. Gọi H là gia điểm của BD và CE .

- a) Chứng minh tứ giác $ADHE$ nội tiếp.
- b) Tính tỉ số $\frac{DE}{BC}$
- c) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Chứng minh $OA \perp DE$

Bài 21. Cho tam giác nhọn PBC . Gọi A là chân đường cao kẻ từ P xuống cạnh BC . Đường tròn đường kính BC cắt PB, PC lần lượt ở M và N . Nối N với A cắt đường tròn đường kính BC ở điểm thứ hai E .

- a) Chứng minh rằng: 4 điểm A, B, N, P cùng nằm trên một đường tròn. Hãy xác định tâm và bán kính đường tròn ấy.
- b) Chứng minh: EM vuông góc với BC

c) Gọi F là điểm đối xứng của N qua BC. Chứng minh rằng $AM.AF = AN.AE$

Bài 22. Cho tam giác vuông ABC ($A = 90^\circ$); trên đoạn AC lấy điểm D (D không trùng với các điểm A và C). Đường tròn đường kính DC cắt BC tại các điểm thứ hai E; đường thẳng BD cắt đường tròn đường kính DC tại điểm F (F không trùng với D). Chứng minh:

- Tam giác ABC đồng dạng với tam giác EDC.
- Tứ giác ABCF nội tiếp đường tròn.
- AC là tia phân giác của góc EAF.

Bài 23. Cho hình thang cân ABCD ($AB > CD$; $AB // CD$) nội tiếp trong đường tròn (O). Tiếp tuyến với đường tròn (O) tại A và D cắt nhau tại E. Gọi I là giao điểm của hai đường chéo AC và BD.

- Chứng minh: Tứ giác AEDI nội tiếp
- Chứng minh $AB // EI$
- Đường thẳng EI cắt cạnh bên AD và BC của hình thang tương ứng ở R và S.

Chứng minh:

- I là trung điểm của RS

- $$\frac{1}{AB} + \frac{1}{CD} = \frac{2}{RS}$$

Bài 24. Cho đường tròn (O; R) có hai đường kính AOB và COD vuông góc với nhau. Lấy điểm E bất kì trên OA, nối CE cắt đường tròn tại F. Qua F dựng tiếp tuyến Fx với đường tròn, qua E dựng Ey vuông góc với OA. Gọi I là giao điểm của Fx và Ey.

- Chứng minh I; E; O; F cùng nằm trên một đường tròn.
- Tứ giác CEIO là hình gì? vì sao?
- Khi E chuyển động trên AB thì I chuyển động trên đường nào?

Bài 25. Cho nửa đường tròn đường kính BC bán kính R và điểm A trên nửa đường tròn (A khác B và C). Từ A hạ AH vuông góc với BC. Trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A vẽ nửa đường tròn đường kính BH cắt AB tại E, nửa đường tròn đường kính HC cắt AC tại F.

- Tứ giác AFHE là hình gì? Tại sao?
- Chứng minh BEFC là tứ giác nội tiếp.
- Hãy xác định vị trí của điểm A sao cho tứ giác AFHE có diện tích lớn nhất. Tính diện tích lớn nhất đó theo R.

Bài 26. Cho 3 điểm M, N, P thẳng hàng theo thứ tự đó. Một đường tròn (O) thay đổi đi qua hai điểm M, N. Từ P kẻ các tiếp tuyến PT, PT' với đường tròn (O)

- Chứng minh: $PT^2 = PM.PN$. Từ đó suy ra khi (O) thay đổi vẫn qua M, N thì T, T' thuộc một đường tròn cố định.

- b) Gọi giao điểm của TT' với PO , PM là I và J . K là trung điểm của MN .
Chứng minh các tứ giác $OKTP$, $OKIJ$ nội tiếp.
- c) Chứng minh rằng: Khi đường tròn (O) thay đổi vẫn đi qua M , N thì TT' luôn đi qua điểm cố định.
- d) Cho $MN = NP = a$. Tìm vị trí của tâm O để góc $TPT' = 60^\circ$.

Bài 27. Cho ΔABC vuông ở A . Trên AC lấy điểm M ($M \neq A$ và C). Vẽ đường tròn đường kính MC . Gọi T là giao điểm thứ hai của cạnh BC với đường tròn. Nối BM kéo dài cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D . Đường thẳng AD cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai S . Chứng minh:

- a) Tứ giác $ABTM$ nội tiếp
- b) Khi M chuyển động trên AC thì ADM có số đo không đổi.
- c) $AB \parallel ST$.

Bài 28. Cho hai đường tròn bằng nhau (O) và (O') cắt nhau tại A , B . Đường vuông góc với AB kẻ qua B cắt (O) và (O') lần lượt tại các điểm C , D . Lấy M trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) . Gọi giao điểm thứ hai của đường thẳng MB với đường tròn (O') là N và giao điểm của hai đường thẳng CM , DN là P .

- a) Tam giác AMN là tam giác gì, tại sao?
- b) Chứng minh $ACPD$ nội tiếp được đường tròn.
- c) Gọi giao điểm thứ hai của AP với đường tròn (O') là Q , chứng minh $BQ \parallel CP$.

Bài 29. Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$). H bất kỳ nằm giữa A và C . Đường tròn (O) đường kính HC cắt BC tại I . BH cắt (O) tại D .

- a) Chứng minh tứ giác $ABCD$ nội tiếp.
- b) AB cắt CD tại M . Chứng minh 3 điểm H ; I ; M thẳng hàng
- c) AD cắt (O) tại K . Chứng minh CA là tia phân giác của KCB

Bài 30. Cho đường tròn (O) , đường kính AB cố định, điểm I nằm giữa A và O sao cho $AI = \frac{2}{3}AO$. Kẻ dây MN vuông góc với AB tại I , gọi C là điểm tùy ý thuộc cung lớn MN sao cho C không trùng với M , N và B . Nối AC cắt MN tại E .

- a) Chứng minh tứ giác $IECB$ nội tiếp.
- b) Chứng minh tam giác AME đồng dạng với tam giác ACM .
- c) Chứng minh $AM^2 = AE.AC$.
- d) Chứng minh $AE.AC - AI.IB = AI^2$.
- e) Hãy xác định vị trí của C sao cho khoảng cách từ N đến tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác CME là nhỏ nhất.

CHUYÊN ĐỀ 6. HÌNH TRỤ - HÌNH NÓN - HÌNH CẦU

Dạng 1. Hình trụ

A. Lý thuyết

1. Đặc điểm

Khi quay hình chữ nhật ABO'O một vòng quanh cạnh OO' cố định, ta được một hình trụ.

- Hai hình tròn (O) và (O') bằng nhau; nằm trong hai mặt phẳng song song được gọi là hai đáy của hình trụ.
- Đường thẳng OO' được gọi là trục của hình trụ.
- Mỗi vị trí của AB được gọi là một đường sinh. Các đường sinh vuông góc với hai mặt phẳng đáy. Độ dài của đường sinh là chiều cao của hình trụ.

2. Diện tích – Thể tích

Cho hình trụ có bán kính đáy R và chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi Rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi Rh + 2\pi R^2$
- Thể tích: $V = \pi R^2 h$

B. Bài tập

Bài 1. Một hình trụ có bán kính đáy bằng $\frac{1}{4}$ đường cao. Khi cắt hình trụ này bằng một mặt phẳng đi qua trục thì mặt cắt là một hình chữ nhật có diện tích là 50cm^2 . Tính diện tích xung quanh và thể tích hình trụ.

Bài 2. Một hình trụ có đường cao bằng đường kính đáy. Biết thể tích của hình trụ là $128\pi\text{cm}^3$. Tính diện tích xung quanh của hình trụ.

Bài 3. Một hình trụ có bán kính đáy là 3cm . Biết diện tích toàn phần gấp đôi diện tích xung quanh. Tính chiều cao của hình trụ?

Bài 4. Một hình trụ có diện tích xung quanh là $20\pi\text{cm}^2$ và diện tích toàn phần là $28\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình trụ đó?

Dạng 2. Hình nón - Hình nón cụt

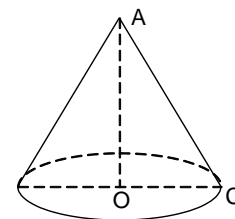
A. Lý thuyết

1. Hình nón

Khi quay tam giác vuông một vòng quanh cạnh OA cố định thì được một **hình nón**.

- Điểm A được gọi là **đỉnh** của hình nón.

- Hình tròn (O) được gọi là **đáy** của hình nón.
- Mỗi vị trí của AC được gọi là một **đường sinh** của hình nón.
- Đoạn AO được gọi là **đường cao** của hình nón.



2. Diện tích – Thể tích hình nón

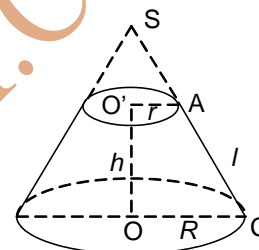
Cho hình nón có bán kính đáy R và đường sinh l, chiều cao h.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi Rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = \pi Rl + \pi R^2$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

3. Hình nón cụt

Khi cắt hình nón bởi một mặt phẳng song song với đáy thì phần hình nón nằm giữa mặt phẳng nói trên và mặt phẳng đáy được gọi là một **hình nón cụt**.

- Hai hình tròn (O) và (O') được gọi là hai đáy.
- Đoạn OO' được gọi là trục. Độ dài OO' là chiều cao.
- Đoạn AC được gọi là đường sinh.



4. Diện tích – Thể tích hình nón cụt

Cho hình nón cụt có các bán kính đáy R và r, chiều cao h, đường sinh l.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(R+r)l$
- Thể tích: $V = \frac{1}{3} \pi h(R^2 + Rr + r^2)$

B. Bài tập

Bài 1. Cho tam giác ABC vuông tại C. Biết $BC = a$, $AC = b$. Quay tam giác vuông này một vòng lần lượt quanh cạnh AC và BC, được một hình nón đỉnh A và một hình nón đỉnh B. Hãy so sánh tỷ số thể tích của hai hình nón và tỷ số diện tích xung quanh của hai hình nón ấy.

Bài 2. Một hình quạt tròn có bán kính 20cm và góc ở tâm là 144° . Người ta uốn hình quạt này thành một hình nón. Tính số đo nửa góc ở đỉnh của hình nón đó.

Bài 3. Một hình nón có bán kính đáy bằng 5cm và diện tích xung quanh là $65\pi\text{cm}^2$. Tính thể tích của hình nón đó.

Bài 4. Một hình nón có đường sinh dài 15cm và diện tích xung quanh là $135\pi\text{cm}^2$.

- a) Tính chiều cao của hình nón đó.

b) Tính diện tích toàn phần và thể tích của hình nón đó.

Bài 5. Một chiếc xô hình nón cụt làm bằng tôn để đựng nước. Các bán kính đáy là 14 cm và 9 cm , chiều cao là 23 cm .

- a) Tính dung tích của xô.
- b) Tính diện tích tôn để làm xô (không kể diện tích các chỗ ghép).

Bài 6. Từ một khúc gỗ hình trụ cao 15 cm , người ta tiện thành một hình nón có thể tích lớn nhất. Biết phần gỗ bỏ đi có thể tích là $640\pi\text{ cm}^3$.

- a) Tính thể tích khúc gỗ hình trụ.
- b) Tính diện tích xung quanh hình nón.

Dạng 3. Hình cầu

A. Lý thuyết

1. Đặc điểm

Khi quay nửa hình tròn tâm O, bán kính R một vòng quanh đường kính AB cố định thì được một **hình cầu**.

Điểm O đgl **tâm**, R là **bán kính** của hình cầu hay mặt cầu đó.

2. Diện tích – Thể tích

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2$
- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

B. Bài tập

Bài 1. Một hình cầu nội tiếp trong một hình trụ. Cho biết diện tích mặt cầu là 60 cm^2 . Hãy tính:

- a) Diện tích toàn phần của hình trụ.
- b) Thể tích hình trụ

Bài 2. Một hình cầu có diện tích bề mặt là $100\pi\text{ m}^2$. Tính thể tích hình cầu đó.

Bài 3. Cho tam giác đều ABC cạnh a , đường cao AH. Ta quay nửa đường tròn nội tiếp, nửa đường tròn ngoại tiếp tam giác đều này và tam giác vuông ABH một vòng quanh AH, được hai mặt cầu và một hình nón. Tính:

- a) Tỷ số diện tích hai mặt cầu nội tiếp và ngoại tiếp hình nón.
- b) Tỷ số thể tích của hai hình cầu nói trên.
- c) Thể tích phần không gian giới hạn bởi hình nón và hình cầu ngoại tiếp hình nón.