CASESTUDY 24H - GÓC CHIA SẺ KIẾN THỨC

NGUYỄN HỮU TUYẾN

MÔN HỌC: TOÁN 11

TUYỂN TẬP CÁC BÀI TOÁN CƠ BẢN & NÂNG CAO

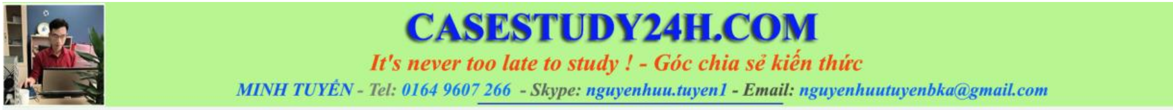
HÀ NỘI - 2018

MỤC LỤC

LỜI NÓI ĐẦU

Thân gửi các em học sinh,

Cuốn sách là tổng hợp các bài tập cơ bản và nâng cao theo từng chương lý thuyết được học. Với mong muốn, các em có điều kiện luyện tập nhiều hơn nên Thầy tổng hợp lại các dạng bài đặc trưng này. Hy vọng các em sẽ tích cực học tập để đạt được kết quả tốt nhất.



Không bao giờ là quá muộn cho việc học tập.

Cùng nhau chia sẻ kiến thức và nâng tầm hiểu biết cùng Casestudy24h.

PHẦN SỐ HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC, PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

A. Lý thuyết

1. Giải các phương trình dạng bậc nhất a.sinx + b.cosx = c.

Phương pháp:

Bước 1: Kiểm tra nếu $a^2+b^2<c^2$ thì phương trình vô nghiệm.

Bước 2: Kiểm tra nếu $\frac{\pi}{2}$ thì chia cả hai vế phương trình cho $\sqrt{a^2+b^2}$

➔ Biến đổi vế trái sử dụng công thức khai triển sin/ cos của một tổng

➔ phương trình lượng giác cơ bản.

2. Giải các phương trình dạng bậc nhất a.(sinx ± cosx) + b.sinx.cosx + c = 0.

Phương pháp:

Bước 1: Đặt t = sinx ± cosx , $|t| \le \sqrt{2}$

Bước 2: Biến đổi sinx. cosx theo t rồi thay vào phương trình

➔ Biến đổi và giải phương trình tìm ra t ➔ giải phương trình cơ bản để tìm ra x.

3. Giải các phương trình dạng bậc 2 đối với sin, cos:

$$a.\sin^2 x + b.\sin x.\cos x + c.\cos^2 x = 0$$

Phương pháp:

Bước 1: Kiểm tra cosx = 0 có là nghiệm của phương trình

Bước 2: Nếu cosx = 0 không là nghiệm thì chia cả hai vế của phương trình cho $\cos^2 x$, phương trình trở thành:

$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = 0$

➔ Giải phương trình bậc hai đối với tanx

3. Chú ý

$\sin x = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad (k \in R)$

$\sin x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, \quad (k \in R)$

$\cos x = 0 \quad \leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad (k \in R)$

$\cos x = 1 \quad \leftrightarrow \quad x = k2\pi, \quad (k \in R)$

$\cos x = -1 \quad \leftrightarrow \quad x = \pi + k2\pi, \quad (k \in R)$

B. Bài tập

Dạng 1. Phương trình cơ bản

Bài 1. Giải các phương trình cơ bản sau

a) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$

b) $\sin(3x-20^o)=-1$

c) $\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1$

d) $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=0$

e) $\cot 2x=-\sqrt{3}$

f) $\cos\left(\frac{x}{3}+60^0\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\sin\left(x-45^0\right)=\cos 2x$

h) $\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$

i) $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{2x+\pi}{3}\right)=2$

j) $\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right).\cot\left(5x+1\right)=0$

k) $\tan\left(2x-15^0\right)-1=0$

l) $\sin 2x=\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)$

m) $\tan\left(3x+\frac{\pi}{2}\right).\left(\cos 2x-1\right)=0$ n)

n) $\sin(2x-1)=\sin(3x+1)$ o)

o) $\cos 3x=-\frac{3}{4}$

Bài 2. Giải các phương trình cơ bản sau

a) $2\sin\left(x-30^0\right)=\sqrt{2}$

b) $\sqrt{3}\tan\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=-3$

c) $\sin\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=0$

d) $6\cos\left(4x+\frac{\pi}{5}\right)+3\sqrt{3}=0$

e) $3\cot\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+\sqrt{3}=0$

f) $4\tan(5x-1)+6=0$

g) $-\frac{1}{2}\sin\frac{x}{3}-\frac{4}{3}=0$

h) $2\sqrt{3}\cos\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)-3=0$

i) $\cos x.\,[2\sin(x-30^0)+\sqrt{3}]=0$

Bài 3. Tìm nghiệm của phương trình sau trong khoảng đã cho

a) $\sin 2x=-\frac{1}{2}$ với $0<x<\pi$

b) $\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ với $-\pi<x<\pi$

c) $\tan\left(2x-15^0\right)=1$ với $-180^0<x<90^0$

d) $\cot 3x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$ với $-\frac{\pi}{2}<x<0$

Dạng 2. Phương trình bậc nhất đối với hàm lượng giác

Bài 1. Giải các phương trình dạng a.sinx + b.cosx = c dưới đây

a) $\sin x+\cos x=1$

b) $3\cos 2x-4\sin 2x=1$

f) $3\cos x+4\sin x=-5$

g) $2\sin 2x-2\cos 2x=\sqrt{2}$

c) $2\sin x - 2\cos x = \sqrt{2}$

d) $3\sin x + 4\cos x = 5$

e) $3\sin(x+1) + 4\cos(x+1) = 5$

h) $5\sin 2x - 6\cos^2 x = 13$

i) $\sin x = \sqrt{3}\cos x$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $3\sin x + 4\cos x = 5$

b) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = \sqrt{2}$

c) $\cos 2x + 9\cos x + 5 = 0$

d) $2\sin 2x - 2\cos 2x = -\sqrt{2}$

e) $\sin 2x + \sin^2 x = \dfrac{1}{2}$

Dạng 3. Phương trình bậc hai đối với hàm lượng giác

Bài 1. Giải các phương trình sau

a) $5\left(\sin x + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x$

b) $\cos^4 x + \sin^4 x + \cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right).\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{3}{2} = 0$

c) $\cos^2 3x.\cos 2x - \cos^2 x = 0$

d) $4.\sin x\cos x + 3\sin^2 x = 6\sin x$

Bài 2. Giải các phương trình sau

a) $\sin^2 3x - \cos^2 4x = \sin^2 5x - \cos^2 6x$

b) $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} x\right) + 2\tan\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

c) $\sin^2\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)\tan^2 x - \cos^2\dfrac{x}{2} = 0$

d) $5.\sin x - 2 = 3(1 - \sin x).\tan^2 x$

Bài 3. Giải các phương trình sau

a) $2\sin 3x - \dfrac{1}{\sin x} = 2\cos 3x + \dfrac{1}{\cos x}$

b) $\cos x.\cos\dfrac{x}{2}.\cos\dfrac{x}{2} - \sin x.\sin\dfrac{x}{2}.\sin\dfrac{3x}{2} = \dfrac{1}{2}$

c) $\dfrac{\cos x\left(2\sin x + 3\sqrt{2}\right) - 2\cos^2 x - 1}{1 + \sin 2x} = 1$

d) $4\cos^3 x + 3\sqrt{2}\sin 2x = 8\cos x$

Bài 4. Giải các phương trình sau

a) $\cos\left(2x + \dfrac{\pi}{4}\right) + \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) + 4\sin x = 2 + \sqrt{2}(1 - \sin x)$

b) $3\cot^2 x + 2\sqrt{2}\sin^2 x = \left(2 + 3\sqrt{2}\right)\cos x$

c) $\dfrac{4\sin^2 2x + 6\sin^2 x - 9 - 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

Bài 5. Cho $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x + \dfrac{2}{5}\sin 5x$. Hãy giải phương trình f'(x)=0.

Bài 6. Giải các phương trình sau

a) $\sin\frac{5x}{2}=5\cos^2 x.\sin\frac{x}{2}$

c) $\sin 2x(\cot x+\tan 2x)=4\cos^2 x$

b) $2\cos^2\frac{6x}{5}+1=3\cos\frac{x}{5}$

d) $\tan^3\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\tan x-1$

Bài 7. Giải các phương trình sau

a) $\dfrac{\sin^4 2x+\cos^4 2x}{\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}=\cos^4 4x$

b) $48-\dfrac{1}{\cos^4 x}-\dfrac{2}{\sin^2 x}(1+\cot 2x.\cot x)=0$

c) $\sin^8 x+\cos^8 x=2\left(\sin^{10} x+\cos^{10} x\right)+\frac{5}{4}\cos 2x$

d) $\cot x-1=\dfrac{\cos 2x}{1+\tan x}+\sin^2 x-\frac{1}{2}\sin 2x$

Bài 8. Giải các phương trình sau

a) $\sin 2x+2\tan x=3$

c) $\cot x-\tan x+4\sin 2x=\dfrac{2}{\sin 2x}$

b) $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

d) $\sin 4x=\tan x$

CHUYÊN ĐỀ 2. TỔ HỢP VÀ XÁC SUẤT

Dạng 1. Bài toán đếm với quy tắc cộng, quy tắc nhân

A. Lý thuyết

1. Quy tắc cộng

Một công việc nào đó có thể được thực hiện theo k phương án khác nhau mà mỗi phương án có số cách thực hiện lần lượt là n_1, n_2, ..., n_k. Nếu các phương án là độc lập với nhau tức là không có cách thực hiện nào xuất hiện trong hai phương án trở lên thì công việc đó có $n = n_1 + n_2 + .. + n_k$ cách thực hiện.

2. Quy tắc nhân

Một công việc nào đó có thể được thực hiện lần lượt qua k giai đoạn để hoàn thành. Nếu giai đoạn thứ i có n_i cách thực hiện và ứng với mỗi giai đoạn sau đó có n_{i+1} cách thực hiện thì công việc đó có $n = n_1.n_2...n_k$ cách thực hiện.

3. Hoán vị

Cho tập hợp gồm n phần tử, n là số nguyên dương, mỗi cách xếp n phần tử này theo một thứ tự nào đó gọi là một hoán vị của n phần tử.

Số các hoán vị của n phần tử là $P_n = n!$

4. Chỉnh hợp

Cho tập hợp A gồm n phần tử, n là số nguyên dương. Từ đó, chọn ra k phần tử sao cho k là số nguyên dương không lớn hơn n, đồng thời sắp k phần tử đó theo thứ tự. Mỗi cách chọn như trên gọi là chỉnh hợp chập k của n phần tử. Số chỉnh hợp chập k của n phần tử:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

5. Tổ hợp

Cho tập A gồm n phần tử, n là số nguyên dương. Mỗi tập con gồm k phần tử của A, k là số nguyên dương không lớn hơn n, được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử. Số các tổ hợp chập k của n phần tử:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

B. Bài tập

Bài 1. Một trường phổ thông có 12 học sinh chuyên Tin và 18 học sinh chuyên Toán. Thành lập một đoàn gồm hai người sao cho có một học sinh chuyên Toán và một học sinh chuyên Tin. Hỏi có bao nhiêu cách lập một đoàn như trên ?

Bài 2. Từ các số 1,2,3,4,5,6,7,8.

a) Có bao nhiêu số tự nhiên gồm 6 chữ số đôi một khác nhau ?

b) Có bao nhiêu số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 ?

c) Có thể lập bao nhiêu số chẵn gồm 5 chữ số khác nhau lấy từ các chữ số: 0,2,3,6,9 ?

d) Có bao nhiêu số chẵn có 4 chữ số đôi một khác nhau ?

Bài 3. Từ các số 0,1,2,3,4,5.

a) Có bao nhiêu số có ba chữ số khác nhau chia hết cho 5 ?

b) Có bao nhiêu số có 3 chữ số khác nhau chia hết cho 9 ?

Bài 4. Đề thi trắc nghiệm có 10 câu hỏi. Học sinh cần chọn trả lời 8 câu.

a) Hỏi có mấy cách chọn tuỳ ý ?

b) Hỏi có mấy cách chọn nếu 3 câu đầu là bắt buộc ?

c) Hỏi có bao nhiêu cách chọn 4 trong 5 câu đầu và 4 trong 5 câu sau?

Bài 5. Một tổ có 12 học sinh. Thầy giáo có 3 đề kiểm tra khác nhau. Cần chọn 4 học sinh cho mỗi đề kiểm tra. Hỏi có mấy cách chọn ?

Bài 6. Có 5 tem thư khác nhau và 6 bì thư khác nhau. Người ta muốn chọn từ đó ra 3 tem thư và 3 bì thư và dán 3 tem thư lên 3 bì thư đã chọn. Mỗi bì thư chỉ dán 1 tem. Hỏi có bao nhiêu cách làm như thế ?

Bài 7. Một lớp có 20 học sinh trong đó có 2 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 người đi dự Hội nghị sao cho trong đó có ít nhất 1 cán bộ lớp ?

Bài 8. Có 5 nhà Toán học nam, 3 nhà Toán học nữ và 4 nhà Vật lý. Muốn lập một đoàn công tác có 3 nguời gồm cả nam lẫn nữ, cần có nhà Toán học lẫn Vật lý. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ?

Bài 9. Một đội Văn Nghệ gồm 10 nguời trong đó có 6 nữ, 4 nam. Có bao nhiêu cách chia đội văn nghệ:

a) Thành hai nhóm có số nguời bằng nhau và mỗi nhóm có số nữ bằng nhau ?

b) Có bao nhiêu cách chọn 5 nguời trong đó không quá một nam ?

Bài 10. Có hai đường thẳng song song d_1 và d_2. Trên d_1 lấy 15 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 9 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà có 3 đỉnh là các điểm đã lấy ?

Bài 11. Trong một hộp có 7 quả cầu xanh, 5 quả cầu đỏ và 4 quả cầu vàng, các quả cầu đều khác nhau. Chọn ngẫu nhiên 4 quả cầu trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn:

a) Trong 4 quả cầu chọn ra có đủ cả ba màu ?

b) Trong 4 quả cầu chọn ra không có đủ ba màu ?

Bài 12. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên tình nguyện đó về giúp đỡ ba tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ ?

Bài 13. Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu trung bình và 15 câu dễ. Từ 30 câu hỏi đó lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2 ?

Bài 14. Đội TNXK của một trường có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp A ; 4 học sinh lớp B ; 3 học sinh lớp C. Cần chọn 4 học sinh làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn như vậy ?

Bài 15. Đội tuyển học sinh giỏi gồm 18 em gồm 7 học sinh khối 12, 6 học sinh khối 11 và 5 học sinh khối 10. Cử 8 em đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em. Hỏi có bao nhiêu cách cử như vậy ?

Bài 16. Một dạ tiệc có 10 nam và 6 nữ biết khiêu vũ. Hỏi có bao nhiêu cách chọn ra 3 nam và 3 nữ để ghép thành 3 cặp nhảy ?

Bài 17. Bill Gate có 5 người bạn thân.Ông muốn mời 5 trong số họ đi chơi xa .Trong 11 người này có 2 người không muốn gặp mặt nhau. Hỏi ngài tỷ phú có bao nhiêu cách mời ?

Bài 18. Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam và 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội tình nguyện đó về 3 tỉnh miền núi sao cho mỗi tỉnh đều có 4 nam và 1 nữ ?

Bài 19. Từ thành phố A đến thành phố B có 3 con đường, từ thành phố B đến thành phố C có 2 con đường, từ thành phố C đến thành phố D có 2 con đường, từ thành phố A đến C có 4 con đường. Không có con đường nào nối trực tiếp thành phố B với D hoặc nối A đến D. Số đường đi khác nhau từ thành phố A đến D là

A. 32 B. 20 C. 36 C. 48

Bài 20. Số các số tự nhiên nhỏ hơn 200000, chia hết cho 3, có thể được viết bởi các chữ số 0, 1, 2 là

A. N = 162 B. N = 144 C. N = 216 D. N = 243

Bài 21. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 3 chữ số là

A. N = 250 B. N = 268 C. N = 294 D. N = 300

Bài 22. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 5 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 2 là

A. N = 1080 B. N = 1260 C. N = 1120 D. 1320

Bài 23. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 6 chữ số đôi một khác nhau và chia hết cho 5 là

A. 1320 B. 1440 C. 1280 D. 2560

Bài 24. Có 20 đội bóng đá tham gia tranh cúp vô địch ngoại hạng Anh. Cứ 2 đội phải đấu với nhau 2 trận gồm một trận lượt đi và một trận lượt về. Sau mỗi vòng thì mỗi đội đã đá thêm một trận. Số trận và số vòng lần lượt là

A. 380 và 19 B. 380 và 38 C. 190 và 19 D. 190 và 38

Bài 25. Số palindrom là số mà nếu ta viết các chữ số theo thứ tự ngược lại thì giá trị của nó không thay đổi. Ví dụ: 12521 là một số panlindrom. Có bao nhiêu số palindrom gồm 5 chữ số?

A. N = 1800 B. N = 2400 C. N = 900 D. N = 1200

Bài 26. Một bó hoa gồm có 5 bông hồng trắng, 6 bông hồng đỏ và 7 bông hồng vàng. Hỏi có mấy cách chọn lấy 3 bông hoa gồm đủ ba màu?

A. N = 120 B. N = 240 C. N = 320 D. N = 210

Bài 27. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau là

A. N = 60 B. N = 30 C. N = 125 D. N = 25

Bài 28. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số chẵn có 3 chữ số là

A. N = 144 B. N = 105 C. N = 248 D. N = 168

Bài 29. Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có hai chữ số mà cả hai chữ số đều chẵn là

A. N = 20 B. N = 12 C. N = 16 D. N = 25

Bài 30. Số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau chia hết cho cả 2 và 5 là

A. N = 72 B. N = 36 C. N = 81 D. N = 90

Bài 31. Một người có 7 cái áo trong đó có 3 áo trắng và 5 cái cà vạt trong đó có 2 cà vạt màu vàng. Số cách chọn một áo và một cà vạt sao cho đã chọn áo trắng thì không chọn cà vạt màu vàng là

A. N = 35 B. N = 18 C. N = 29 D. N = 31

Bài 32. Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5}. Có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y) biết x và y đều thuộc A.

A. N = 15 B. N = 20 C. N = 25 D. N = 10

Bài 33. Cho tập hợp A = {1, 2, 3, 4, 5}. Có bao nhiêu cặp sắp thứ tự (x, y) thỏa mãn x và y thuộc A sao cho x + y = 6.

A. N = 5 B. N = 6 C. N = 7 D. N = 8

Bài 34. Số các số có 2 chữ số mà chữ số đứng trước lớn hơn chữ số đứng sau là

A. N = 50 B. N = 30 C. N = 65 D. N = 45

Bài 35. Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số lẻ gồm 2 chữ số là

A. N = 15 B. N = 18 C. N = 36 D. N = 30

Bài 36. Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số gồm 3 chữ số đôi một khác nhau không chia hết cho 5 là

A. N = 108 B. N = 121 C. N = 100 D. N = 120

Bài 37. Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có 3 chữ số mà tổng các chữ số bằng số chẵn là

A. N = 108 B. N = 50 C. N = 100 D. N = 128

Bài 38. Từ 6 chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có 2 chữ số khác nhau và chia hết cho 9 là

A. N = 6 B. N = 12 C. N = 8 D. N = 4

Bài 39. Từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau và không chia hết cho 5 là

A. N = 64 B. N = 30 C. N = 48 D. N = 120

Bài 40. Từ 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được số các số chẵn có 3 chữ số đôi một khác nhau và nhỏ hơn 300 là

A. N = 40 B. N = 20 C. N = 24 D. N = 36

Bài 41. Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được số các số có 3 chữ số đôi một khác nhau lớn hơn 300 và nhỏ hơn 500 là

A. N = 32 B. N = 40 C. N = 26 D. N = 44

Bài 42. Số cách sắp xếp 4 viên bi đỏ có đánh dấu khác nhau và 4 viên bi đen có đánh dấu khác nhau xếp thành một dãy sao cho các màu xen kẽ nhau là

A. N = 1152 B. N = 1440 C. N = 1280 D. N = 1960

Dạng 2. Bài toán rút gọn, giải phương trình

Bài 1. Rút gọn các biểu thức sau

$$A=\frac{P_4P_7}{P_{10}}\left(\frac{P_8}{P_3P_5}-\frac{P_9}{P_2P_7}\right)\qquad B=\frac{A_n^6+A_n^5}{A_n^4}\qquad C=\frac{\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)A_5^2}{P_3-2P_2}$$

$$D=\frac{P_{n+1}}{A_n^4P_{n-k}}+\frac{C_{15}^5+2C_{15}^6+C_{15}^7}{C_{17}^7}\qquad E=\frac{\frac{1}{3}C_6^2-\frac{1}{28}C_8^3+\frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3A_5^3}\qquad F=\frac{A_5^3-A_5^2}{P_2}+\frac{P_5}{P_2}$$

Bài 2. Chứng minh

a) $\frac{n}{P_n}=\frac{1}{P_{n-1}}+\frac{1}{P_{n-2}}$

c) $A_{n+k}^{n+2}+A_{n+k}^{n+1}=k^2A_{n+k}^{n}$

b) $P_kA_{n+1}^2A_{n+3}^2A_{n+5}^2=n.k!A_{n+5}^5$

d) $C_n^k=C_n^{n-k}$

Bài 3. Giải các phương trình và bất phương trình sau:

a) $P_2x^2-P_3.x=8$

b) $2A_x^2+50=A_{2x}^2\ ,\ x\in N$

c) $A_x^3+C_x^2=14C_x^{x-1}$

d) $C_x^1+C_x^2+C_x^3=\frac{7}{2}x$

e) $C_{x-1}^3-C_{x-1}^2=\frac{2}{3}A_{x-2}^2$

f) $\frac{1}{C_x^1}-\frac{1}{C_{x+1}^2}=\frac{7}{6C_{x+4}^1}$

g) $A_n^3+C_n^{n-2}=14n$

h) $A_n^3-2C_n^4=3A_n^2$

i) $2C_{x+1}^2+3A_x^2<30$

j) $\frac{1}{2}A_{2x}^x-A_x^2\le\frac{6}{x}C_x^3+10$

k) $\frac{x!-(x-1)!}{(x+1)!}=\frac{1}{6}$

Bài 4. Giải bất phươngtrình $\frac{P_{n+4}}{P_n.P_{n+2}}<\frac{15}{P_{n-1}}$

Bài 5. Giải hệ phương trình:

a) $\begin{cases}2A_x^y+5C_x^y=90\\5A_x^y-2C_x^y=80\end{cases}$ b) $\begin{cases}5C_x^{y-2}=3C_x^{y-1}\\C_x^y=C_x^{y-1}\end{cases}$ c) $C_{2n}^3=20C_n^2$

Bài 6. Kết quả rút gọn biểu thức A = $C_n^1+2\frac{C_n^2}{C_n^1}+\ldots+k\frac{C_n^k}{C_n^{k-1}}+\ldots+n\frac{C_n^n}{C_n^{n-1}}$ là

A. n(n + 1)/2 B. n(n + 1) C. n(n + 2)/3 D. n(n – 1)/3

Bài 7. Giải phương trình $\frac{1}{C_4^x}-\frac{1}{C_5^x}=\frac{1}{C_6^x}$

A. x = 1 B. x = 2 C. x = 3 D. x = 4

Bài 8. Giải phương trình $C_{10+x}^{x+4}=C_{10+x}^{2x-10}$

A. x = 8 ∪ x = 6 B. x = 10 ∪ x = 8 C. x = 8 ∪ x = 14 D. x = 6 ∪ x = 14

Bài 9. Tìm số tự nhiên x thỏa mãn $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$

A. x = 10 B. x = 12 C. x = 6 D. x = 8

Bài 10. Tìm số tự nhiên x thỏa $C_{8+x}^{x+3}=5A_{x+6}^3$

A. x = 8 ∪ x = 16 B. x = 9 ∪ x = 17 C. x = 17 D. x = 16

Bài 11. Số nghiệm của bất phương trình $C_{n-1}^4-C_{n-1}^3<\frac{5}{4}A_{n-2}^2$ là

A. 4 B. 5 C. 6 D. vô số

Bài 12. Giải phương trình $C_{x+1}^{x-2}+2C_{x-1}^3=7(x-1)$

A. x = 5 B. x = 4 C. x = 3 D. x = 7

Bài 13. Giải phương trình $A_x^5=336.C_{x-2}^{x-5}$

A. x = 7 B. x = 8 C. x = 9 D. x = 10

Bài 14. Số giá trị nguyên dương của n thỏa $4.C_{n-1}^4-4.C_{n-1}^3<5.A_{n-2}^2$ là

A. 0 B. 6 C. 7 D. vô số

Bài 15. Số giá trị nguyên dương của x thỏa $2.C_{x+1}^2+3.A_x^2<30$ là

A. 0 B. 2 C. 1 D. 4

Bài 16. Giải hệ phương trình $\begin{cases}5.C_{x+1}^y=6.C_x^{y+1}\\ C_{x+1}^y=3.C_x^{y-1}\end{cases}$

A. (x; y) = (9; 4) B. (x; y) = (9; 5) C. (x; y) = (8; 5) D. (x; y) = (8; 3)

Bài 17. Giải hệ phương trình $\begin{cases}2A_x^y+5C_x^y=90\\ 5A_x^y+2C_x^y=80\end{cases}$

A. (x; y) = (5; 4) B. (x; y) = (6; 3) C. (x; y) = (6; 2) D. (x; y) = (5; 2)

Bài 18. Tìm số tự nhiên n thỏa $A_n^3=20.n$

A. n = 5 B. n = 6 C. n = 10 D. n = 12

Bài 19. Tìm số tự nhiên n thỏa $A_n^3+5A_n^2=2(n+15)$

A. n = 2 B. n = 4 C. n = 3 D. n = 5

Bài 20. Tìm số tự nhiên n thỏa $A_{2n}^2-3A_n^2=42$

A. n = 10 B. n = 8 C. n = 6 D. n = 16

Bài 21. Tìm số nguyên dương n sao cho $2P_n+6A_n^2-P_nA_n^2=12$

A. n = 2 ∪ n = 3 B. n = 3 ∪ n = 4 C. n = 4 ∪ n = 5 D. n = 2 ∪ n = 4

Bài 22. Số các giá trị nguyên dương của n thỏa mãn $\frac{A_{n+2}^{4}}{P_{n+2}}-\frac{143}{4P_{n-1}}<0$ là

A. 36 B. 35 C. 33 D. 30

Dạng 3. Nhị thức Newton

Bài 1. Tìm hệ số của số hạng thứ tư trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$

Bài 2. Tìm hệ số của số hạng thứ 31 trong khai triển $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{40}$

Bài 3. Tìm hạng tử chứa x^2 của khai triển: $\left(\sqrt[3]{x^{-2}}+x\right)^{7}$

Bài 4. Tìm hạng tử không chứa x trong các khai triển sau:

a. $\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)^{12}$ b. $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^{7}$

Bài 5. Tìm hệ số của $x^{12}y^{13}$ trong khai triển của $(2x - 3y)^{25}$

Bài 6. Tìm hạng tử đứng giữa trong khai triển $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}$

Bài 7. Trong khai triển $\left(\sqrt[3]{\frac{a}{\sqrt{b}}}+\sqrt{\frac{b}{\sqrt[3]{a}}}\right)^{21}$. Tìm hệ số của số hạng chứa a và b có số mũ bằng nhau ?

Bài 8. Biết khai triển $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^{n}$. Tổng các hệ số của số hạng thứ nhất, hai, ba là 46. Tìm số hạng không chứa x ?

Bài 9. Cho biết tổng ba hệ số của ba số hạng đầu tiên trong khai triển $\left(x^2-\frac{2}{x}\right)^{n}$, là 97. Tìm hạng tử của khai triển chứa x^4 ?

Bài 10. Cho khai triển $\left(x-\frac{1}{3}\right)^{n}=C_n^0x^n-\frac{1}{3}C_n^1x^{n-1}+.......(-1)^n\frac{1}{3^n}C_n^n$. Biết hệ số của số hạng thứ ba trong khai triển là 5. Tìm số hạng chính giữa ?

Bài 11. Cho khai triển $(x^3+\frac{2}{x^2})^n=C_n^0(x^3)^n+........+C_n^n(\frac{2}{x^2})^n$. Biết tổng ba hệ số đầu là 33. Tìm hệ số của x^2.

Bài 12. Tìm số hạng chứa x^8 trong khai triển $\left(\frac{1}{x^3}+\sqrt{x^5}\right)^n$. Biết rằng $C_{n+4}^{n+1}-C_{n+3}^{n}=7(n+3)$.

Bài 13. Tìm hệ số của x^7 trong khai triển $(2 - 3x)^n$, trong đó n thoả mãn hệ thức sau:

$$C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^3+.......+C_{2n+1}^{2n+1}=1024$$

Bài 14. Giải phương trình sau: $C_{2n}^2+C_{2n}^4+....+C_{2n}^{2n}=2^{2007}-1$

Bài 15. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển $\left(\frac{1}{x^4}-x^7\right)^n$ biết n thoả mãn hệ thức $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+C_{2n+1}^3+.......+C_{2n+1}^{2n+1}=2^{20}-1$.

Bài 16. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{10} khi khai triển $(2+x)^n$ biết:

$$3^nC_n^0-3^{n-1}C_n^1+3^{n-2}C_n^2+....+(-1)^nC_n^n=2048$$

Bài 17. Cho $C_n^n+C_n^{n-1}+C_n^{n-2}=79$. Trong khai triển nhị thức $\left(x\sqrt[3]{x}+x^{\frac{-28}{15}}\right)^n$, hãy tìm số hạng không phụ thuộc vào x ?

Bài 18. Tìm hệ số của số hạng chứa x^{26} trong khai triển nhị thức $\left(\frac{1}{x^4}+x^7\right)^n$, biết tổng $C_{2n+1}^1+C_{2n+1}^2+...+C_{2n+1}^n=2^{20}-1$.

Bài 19. Tìm hệ số của x^4 trong khai triển biểu thức $A=\left(1-x-3x^2\right)^n$. Trong đó n là số nguyên dương thỏa mãn: $2\left(C_2^2+C_3^2+C_4^2+...+C_n^2\right)=3A_{n+1}^2$

Bài 20. Tổng các hệ số trong khai triển nhị thức f(x) chính là f(1).

Cho $f(x)=(1+x)^{100}=a_0+a_1x^1+a_2x^2+...+a_{100}x$

a) Tính a_{97}

b) $S=a_0+a_1+a_2+...+a_{100}$

c) $M=1.a_1+2.a_2+...+100.a_{100}$

Bài 21. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của A = $(x – 2/x^4)^{15}$.

A. 1820 B. –1820 C. 3640 D. –3640

Bài 22. Tìm số hạng không chứa x trong khai triển của B = $(x^2 – 2/x)^{12}$.

A. 126720 B. –126720 C. 7920 D. –7920

Bài 23. Tìm hệ số của x^4y^3 trong khai triển của P = $(2x + 3y)^7$.

A. 11520 B. 12510 C. 15120 D. 12150

Bài 24. Khai triển và rút gọn đa thức $P(x) = (1 + x) + (1 + x)^2 + (1 + x)^3 + ... + (1 + x)^{12}$ sẽ được đa thức $P(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{12}x^{12}$. Hệ số a_9 là

A. $a_9 = 256$ B. $a_9 = 286$ C. $a_9 = 320$ D. $a_9 = 132$

Bài 25. Cho đa thức $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + 3(1 + x)^3 + ... + 20(1 + x)^{20} = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + ... + a_{20}x^{20}$. Xác định hệ số a_{18}.

A. 3254 B. 3549 C. 4179 D. 4569

Bài 26. Trong khai triển $P(x) = (3 – 2x)^{25}$, hãy tính tổng các hệ số của đa thức P(x).

A. 3^{25} B. 2^{25} C. –1 D. 1

Bài 27. Trong khai triển của nhị thức $(a^2 + b^3)^{15}$, tìm các số hạng chứa a, b với số mũ giống nhau.

A. $5005.a^6b^6$ B. $1010.a^{15}b^{15}$ C. $5005.a^{18}b^{18}$ D. $1010.a^9b^9$

Bài 28. Tìm số hạng thứ 4 trong khai triển $(1/x^2 – x^3/2)^{12}$ theo thứ tự số mũ tăng dần của biến.

A. $(99/4)x^{–1}$ B. $(–99/4)x^{–1}$ C. $(99/4)x$ D. $(–99/4)x$

Bài 29. Tìm số hạng độc lập với x trong khai triển $(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x})^{16}$

A. 1820 B. 1280 C. 2180 D. 2810

Bài 30. Số số hạng chứa x với số mũ tự nhiên trong khai triển $(x+\frac{1}{\sqrt[3]{x}})^{13}$ là

A. 2 B. 3 C. 5 D. 4

Bài 31. Biết tổng các hệ số của khai triển $(3 – x^2)^n$ bằng 1024. Hệ số của số hạng chứa x^{12} trong khai triển đó là

A. –17010 B. 17010 C. –153090 D. 153090

Bài 32. Tính tổng $S = C_{10}^0C_{12}^6 + C_{10}^1C_{12}^5 + C_{10}^2C_{12}^4 + ... + C_{10}^6C_{12}^0$

A. 74236 B. 74362 C. 74613 D. 24671

Bài 33. Tính tổng $S = (C_9^0)^2 + (C_9^1)^2 + (C_9^2)^2 + ... + (C_9^9)^2$

A. 39432 B. 43758 C. 36730 D. 48620

Dạng 4. Biến cố và Xác suất biến cố

A. Lý thuyết

1. Khái niệm

Không gian mẫu Ω là tập hợp tất cả kết quả có thể xảy ra của một phép thử.

Biến cố A là tập hợp con của Ω

Hai biến cố xung khắc nếu giao của chúng là tập rỗng

Hai biến cố là độc lập nếu sự xảy ra biến cố này không ảnh hưởng đến sự xảy ra biến cố kia.

Xác suất của biến cố A là $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(\Omega)}$

Trong đó n(A) là số phần tử của A, $n(\Omega)$ là số phần tử của Ω.

2. Tính chất

$0 \leq P(A) \leq 1$

$P(A \cap B) = P(A) . P(B)$ nếu 2 biến cố A, B độc lập nhau.

B. Bài tập

Bài 1. Gieo một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất tích số chấm hai lần là số lẻ.

A. P = 1/3 B. P = 1/2 C. P = 1/4 D. P = 1/5

Bài 2. Một túi chứa 6 viên bi trắng và 5 viên bi xanh. Lấy ra 4 viên bi từ túi, xác suất lấy được 4 viên bi cùng màu là

A. P = 1/33 B. P = 2/33 C. P = 1/11 D. P = 2/11

Bài 3. Sắp xếp ngẫu nhiên 5 bạn học sinh A, B, C, D, E ngồi vào một chiếc ghế dài có 5 chỗ ngồi. Xác suất để hai bạn A và E ngồi cạnh nhau là

A. P = 1/5 B. P = 1/4 C. P = 2/5 D. P = 3/10

Bài 4. Gieo hai con súc sắc cân đối đồng chất. Tính xác suất tổng hai mặt xuất hiện bằng 7.

A. P = 1/3 B. P = 1/6 C. P = 1/12 D. P = 1/4

Bài 5. Một bình đựng 5 viên bi xanh và 3 viên bi đỏ. Lấy ngẫu nhiên 4 viên bi. Tính xác suất để được ít nhất 3 viên bi xanh.

A. P = 1/2 B. P = 1/3 C. P = 1/4 D. P = 1/5

Bài 6. Gieo ngẫu nhiên một con súc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất ít nhất một lần xuất hiện mặt 6 chấm.

A. P = 11/36 B. P = 1/3 C. P = 1/6 D. P = 5/18

Bài 7. Gieo đồng thời bốn đồng xu cân đối đồng chất. Tính xác suất có đúng 3 đồng xu ngửa.

A. P = 1/16 B. P = 1/4 C. P = 11/16 D. P = 1/6

Bài 8. Một hộp bóng đèn có 12 bóng, trong đó có 7 bóng tốt. Lấy ngẫu nhiên 3 bóng. Tính xác suất để lấy được ít nhất 2 bóng tốt.

A. P = 5/11 B. P = 6/11 C. P = 7/11 D. P = 8/11

Bài 9. Một lớp học gồm 20 học sinh trong đó có 6 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Văn và 4 học sinh giỏi cả 2 môn Toán và Văn. Chọn ra 2 em. Tính xác suất để 2 em đó là học sinh giỏi ít nhất một môn Toán hoặc Văn.

A. P = 2/19 B. P = 3/19 C. P = 11/95 D. P = 21/190

Bài 10. Một hộp có 20 quả cầu giống nhau, trong đó có 12 quả cầu trắng và 8 quả cầu đen. Lấy ngẫu nhiên 3 quả. Tính xác suất để trong 3 quả chọn ra có ít nhất một quả màu đen.

A. P = 46/57 B. P = 15/19 C. P = 16/19 D. P = 47/57

Bài 11. Một tổ có 6 học sinh nam và 4 học sinh nữ. Giáo viên chọn ra 2 em đi thi văn nghệ. Tính xác suất để 2 học sinh được chọn khác phái.

A. P = 7/15 B. P = 1/2 C. P = 8/15 D. P = 3/5

Bài 12. Một lớp có 30 học sinh, trong đó có 8 em giỏi, 15 em khá và 7 em trung bình. Chọn ngẫu nhiên 3 em đi dự đại hội. Tính xác suất để không có học sinh trung bình.

A. P = 2/145 B. P = 18/29 C. P = 25/58 D. P = 253/580

Bài 13. Cho 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau lấy từ 7 số trên. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc X. Tính xác suất số đó là số lẻ.

A. P = 9/14 B. P = 5/7 C. P = 4/7 D. P = 11/14

Bài 14. Cho 7 số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Gọi X là tập hợp các số gồm hai chữ số khác nhau lấy từ 7 số trên. Lấy ngẫu nhiên một số thuộc X. Tính xác suất số đó chia hết cho 5.

A. P = 2/5 B. P = 1/5 C. P = 1/7 D. P = 2/7

Bài 15. Một xạ thủ A có xác suất bắn trúng bia mục tiêu là 0,7. Giả sử xạ thủ này bắn 3 lần. Tính xác suất để xạ thủ A bắn trúng mục tiêu ít nhất một lần.

A. P = 0,973 B. P = 0,997 C. P = 0,987 D. P = 0,975

Bài 16. Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất tổng số chấm của hai lần gieo là số lẻ.

A. P = 1/2 B. P = 3/5 C. P = 3/7 D. P = 5/9

Bài 17. Gieo một con xúc sắc cân đối đồng chất hai lần. Tính xác suất có ít nhất một lần số chấm từ 5 trở lên.

A. P = 1/2 B. P = 3/5 C. P = 3/7 D. P = 5/9

CHUYÊN ĐỀ 3. DÃY SỐ - CẤP SỐ CỘNG & CẤP SỐ NHÂN

A. Lý thuyết

1. Chứng minh đẳng thức (bất đẳng thức) bằng phương pháp qui nạp toán học

Để chứng minh mệnh đề chứa biến A(n) là một mệnh đề đúng với mọi giá trị nguyên dương n, ta thực hiện như sau:

Bước 1: Kiểm tra mệnh đề đúng với n = 1.

Bước 2: Giả thiết mệnh đề đúng với số nguyên dương n = k tuỳ ý (k ≥ 1), chứng minh rằng mệnh đề đúng với n = k + 1.

2. Cấp số cộng

Định nghĩa: (u_n) *là cấp số cộng* $\Leftrightarrow u_{n+1} = u_n + d,\ \forall n \in N^*$ *(d: công sai)*

Số hạng tổng quát: $u_n = u_1 + (n-1)d$ *với n ≥ 2*

Tính chất các số hạng: $u_k = \dfrac{u_{k-1} + u_{k+1}}{2}$ *với k ≥ 2*

Tổng *n* số hạng đầu tiên: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \dfrac{n(u_1 + u_n)}{2} = \dfrac{n\left[2u_1 + (n-1)d\right]}{2}$

3. Dãy cấp số nhân

Định nghĩa: *(u_n) là cấp số nhân ⇔ $u_{n+1} = u_n.q$ với $n \in N^*$ (q: công bội)*

Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$ *với n ≥ 2*

Tính chất các số hạng: $u_k^2 = u_{k-1}.u_{k+1}$ *với k ≥ 2*

Tổng *n* số hạng đầu tiên: $\left[\begin{array}{ll} S_n = nu_1 & \text{với } q = 1 \\ S_n = \dfrac{u_1(1-q^n)}{1-q} & \text{với } q \neq 1 \end{array}\right.$

B. Bài tập

Dạng 1. Các bài toán chứng minh dùng phương pháp qui nạp toán học

Bài 1: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*

a) $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

b) $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

d) $1.4 + 2.7 + ... + n(3n+1) = n(n+1)^2$

e) $1.2 + 2.3 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

f) $\dfrac{1}{1.2} + \dfrac{1}{2.3} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$

Bài 2: Chứng minh rằng với mọi n ∈ N*

a) $2^n > 2n + 1$ (n ≥ 3)

b) $1 + \dfrac{1}{2^2} + ... + \dfrac{1}{n^2} < 2 - \dfrac{1}{n}$ (n ≥ 2)

c) $1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$

d) $2^{n+2} > 2n + 5$

e) $\dfrac{1}{2}.\dfrac{3}{4}...\dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$

f) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + ... + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$ (n > 1)

Dạng 2. Các bài toán về cấp số cộng

Bài 1: Trong các dãy số (u_n) dưới đây, dãy số nào là cấp số cộng. Đồng thời, khi đó xác định số hạng đầu và công sai của dãy số đó:

a) $u_n = 3n - 7$

b) $u_n = \dfrac{3n+2}{5}$

c) $u_n = n^2$

d) $u_n = 3^n$ e) $u_n = \frac{7-3n}{2}$ f) $u_n = \frac{n}{2} - 1$

Bài 2: Tìm số hạng đầu và công sai của cấp số cộng, biết:

a) $\begin{cases} u_1 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_1 + u_6 = 17 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_2 + u_5 - u_3 = 10 \\ u_4 + u_6 = 26 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 = -15 \\ u_{14} = 18 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_7 - u_3 = 8 \\ u_2 . u_7 = 75 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_7 + u_{15} = 60 \\ u_4^2 + u_{12}^2 = 1170 \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_3 + u_5 = -12 \\ u_1 u_2 u_3 = 8 \end{cases}$

Bài 3: Tìm

a) Giữa các số 7 và 35 hãy đặt thêm 6 số nữa để được một cấp số cộng.

b) Giữa các số 4 và 67 hãy đặt thêm 20 số nữa để được một cấp số cộng.

Bài 4: Tìm

a) Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng là 27 và tổng các bình phương của chúng là 293.

b) Tìm 4 số hạng liên tiếp của một cấp số cộng, biết tổng của chúng bằng 22 và tổng các bình phương của chúng bằng 66.

Bài 5: Tìm

a) Ba góc của một tam giác vuông lập thành một cấp số cộng. Tìm số đo các góc đó.

b) Số đo các góc của một đa giác lồi có 9 cạnh lập thành một cấp số cộng có công sai d = 3^0. Tìm số đo của các góc đó.

c) Số đo các góc của một tứ giác lồi lập thành một cấp số cộng và góc lớn nhất gấp 5 lần góc nhỏ nhất. Tìm số đo các góc đó.

Dạng 3. Các bài toán về cấp số nhân

Bài 1: Tìm số hạng đầu và công bội của cấp số nhân, biết:

a) $\begin{cases} u_4 - u_2 = 72 \\ u_5 - u_3 = 144 \end{cases}$ b) $\begin{cases} u_1 - u_3 + u_5 = 65 \\ u_1 + u_7 = 325 \end{cases}$ c) $\begin{cases} u_3 + u_5 = 90 \\ u_2 - u_6 = 240 \end{cases}$

d) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 14 \\ u_1 . u_2 . u_3 = 64 \end{cases}$ e) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 21 \\ \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \frac{1}{u_3} = \frac{7}{12} \end{cases}$ f) $\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 30 \\ u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 = 340 \end{cases}$

Bài 2: a) Giữa các số 160 và 5 hãy chèn vào 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

b) Giữa các số 243 và 1 hãy đặt thêm 4 số nữa để tạo thành một cấp số nhân.

Bài 3: Tìm 3 số hạng liên tiếp của một cấp số nhân biết tổng của chúng là 19 và tích là 216.

Bài 4: Tìm

a) Tìm số hạng đầu của một cấp số nhân, biết rằng công bội là 3, tổng số các số hạng là 728 và số hạng cuối là 486.

b) Tìm công bội của một cấp số nhân có số hạng đầu là 7, số hạng cuối là 448 và tổng số các số hạng là 889.

Bài 5: Tìm

a) Tìm 4 góc của một tứ giác, biết rằng các góc đó lập thành một cấp số nhân và góc cuối gấp 9 lần góc thứ hai.

b) Độ dài các cạnh của ΔABC lập thành một cấp số nhân. Chứng minh rằng ΔABC có hai góc không quá 60^0.

CHUYÊN ĐỀ 4. GIỚI HẠN

Dạng 1. Giới hạn dãy số

Bài 1. Tính giới hạn của các dãy số sau:

$I_1 = \lim \dfrac{3n^3 - 7n + 1}{4n^3 - 3n^2 + 2}$ $\quad I_2 = \lim \dfrac{3n^7 - 8n^6 + 3}{5n^8 + n^3 + 2n}$ $\quad I_3 = \lim \dfrac{n + \sqrt{n^2 + 2n + 3}}{3 - \sqrt{2n^2 + 1}}$

$I_4 = \lim \dfrac{2n + \sqrt{n^3 + 3n + 2}}{1 + n\sqrt{3n + 4}}$ $\quad I_5 = \lim(\sqrt{n^2 + n + 3} - n)$ $\quad I_6 = \lim(\sqrt{3n^2 + 2n + 1} - n\sqrt{3})$

Bài 2. Tính giới hạn của các dãy số sau:

$I_7 = \lim \dfrac{2^n + 4.3^n}{5 - 7.3^n}$ $\quad I_8 = \lim \dfrac{3.2^n - 5.7^n}{4^n + 3.5^n}$ $\quad I_9 = \lim \dfrac{4n^8 + 12n - 1}{n^2 + 5n^6 - 6n^8}$

$I_{10} = \lim \dfrac{3n^5 - 2n^4 + 7}{2n + 3 + 6n^6 - n^5}$ $\quad I_{11} = \lim \dfrac{n\sqrt{n^2 + n + 1}}{3n^2 + 2n + 12}$ $\quad I_{12} = \lim \dfrac{2 - \sqrt[3]{n^4 + 1}}{2n + 3}$

Dạng 2. Giới hạn của hàm số

Bài 1. Tính giới hạn của hàm số theo định nghĩa để chứng minh:

$I_1 = \lim\limits_{x \to 2}(2x + 3) = 7$ $\quad I_2 = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x + 1}{2(x - 1)} = 1$ $\quad I_3 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$

Giới hạn dạng $\frac{0}{0}$:

Bài 2. Tính giới hạn của các hàm số sau

$I_1 = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 3x + 2}$ $\quad I_2 = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}$ $\quad I_3 = \lim\limits_{x \to 5} \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 25}$

$I_4 = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{-2x^2 + 6x - 4}$ $\quad I_5 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ $\quad I_6 = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - x^2 - x + 1}{-x^2 + 3x - 2}$

$I_7 = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{2x^2 + x - 6}{x^3 + 8}$ $\quad I_8 = \lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^4 - x^2 - 72}{x^2 - 2x - 3}$ $\quad I_9 = \lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$

$I_{10} = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-5x^2+3x+9}{x^4-8x^2-9}$ $I_{11} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^4+8x^3+7x^2-4x-4}{3x^3+14x^2+20x+8}$

$I_{12} = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-9x+2}{x^3-x+6}$ $I_{13} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$ $I_{14} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{1-x}-\dfrac{3}{1-x^3}\right)$

$I_{15} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-5x^5+4x^6}{(1-x)^2}$ $I_{16} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$ $I_{17} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}$

$I_{18} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{x-a}$ $I_{19} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{2(x+h)^3-2x^3}{h}$ $I_{20} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{1992}+x-2}{x^{1990}+x-2}$

$I_{21} = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}+\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$

Bài 3. Tính giới hạn của các hàm số sau

$A = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2+x-18}{x^3-8}$ $B = \lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2+x-30}{2x^2-9x-5}$ $C = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{x^3+2x^2-x-2}$

$D = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{4x^2-1}{4x^3+2x^2-1}$ $E = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+2x-3}$ $F = \lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{2x^2-5x+2}{4x^2-1}$

$G = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{-x^2+4x+5}$ $H = \lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^4-16}{x^2+2x}$ $I = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-x}$

$J = \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{x^2-4x+3}$ $K = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-x^3+6x^2-12x+8}{x^2-4x+4}$

$L = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2+x-1}{-x^2-5x+6}$ $M = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{8x^3-64}{x^2-5x+6}$ $N = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+2x^2-6x-4}{8-x^3}$

$O = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+x^2-5x-2}{x^2-3x+2}$ $P = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+4x^2+6x+3}{x^2-x-2}$ $Q = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^2-2x+1}$

Bài 4. Tính giới hạn của các hàm số sau

$I_1 = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2+x+1}}{x}$ $I_2 = \lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x-3}-2}{49-x^2}$ $I_3 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2-\sqrt{x+2}}{x^2-3x+2}$

$I_4 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-4}$ $I_5 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x+7}-3}{x^3-4x^2+3}$ $I_6 = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{2x+1}}{x-4}$

$I_7 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2-\sqrt{x^2+3}}{-x^2+3x-2}$ $I_8 = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{x^3-8}$ $I_9 = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x-2-\sqrt{4x^2-x-2}}{x^2-3x+2}$

$I_{10} = \lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$ $I_{11} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3-\sqrt{8+x}}{2x-\sqrt{5-x}}$ $I_{12} = \lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

$I_{13} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{x^3+x^2-2}$ $I_{14} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt[3]{1-x}}{2x+x^2}$ $I_{15} = \lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{2x^2+5x+3}$

$I_{16} = \lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{2x+12}+x}{x^2+2x}$ $I_{17} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x}-1}$ $I_{18} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

$I_{19} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{\sqrt{x}-1}$ $I_{20} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$ $I_{21} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$

Bài 5. Tính giới hạn của các hàm số sau

$A = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x}$ $B = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+9}+\sqrt{x+16}-7}{x}$

$C = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}+\sqrt{x+4}-3}{x}$ $D = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt[3]{x+1}}{x}$

$E = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt[3]{3x+5}}{x^2-1}$ $F = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{8x+11}-\sqrt{x+7}}{x^2-3x+2}$

Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty$

Bài 1. Tìm các giới hạn sau

$A = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{2x+1}{x-1}$ $B = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^2+1}{1-3x-5x^2}$ $C = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x}+1}{x^2+x+1}$

$D = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x(2x^2-1)}{(5x-1)(x^2+2x)}$ $E = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x^3-2x+2}{-2x^3+2x^2-1}$ $F = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{3x^3-2x^2-1}{4x^4+3x-2}$

$G = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^3-2x^2-2}{3x^2-x-1}$ $H = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{x^4-3x^2+1}{-x^3+2x-2}$ $I = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(x-1)^2(7x+2)^2}{(2x+1)^4}$

$J = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{(2x-3)^2(4x+7)^3}{(3x-4)^2(5x^2-1)}$ $K = \lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{3x-1}$ $L = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$

$M = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-3x}+2x}{3x-1}$ $N = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+x+2}+3x+1}{\sqrt{4x^2+1}+1-x}$

$O = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2-2x+1}+2-x}{\sqrt{9x^2-3x}+2x}$ $P = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+2x+3}+4x+1}{\sqrt{4x^2+1}+2-x}$ $Q = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x\sqrt{x+3}}{x^2+1}$

$R = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x}{2x-2}$ $S = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\sqrt[3]{(x^3+2x^2)^2}+x\sqrt[3]{x^3+2x^2}+x^2}{3x^2-2x}$

Bài 2. Tính các giới hạn sau

$I_1 = \lim\limits_{x\to +\infty}(2x^3-3x)$ $I_2 = \lim\limits_{x\to \pm\infty}(2x^3-3x)$ $I_3 = \lim\limits_{x\to \pm\infty}\sqrt{x^2-3x+4}$

$I_4 = \lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ $I_5 = \lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$ $I_6 = \lim\limits_{x\to +\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$

$I_7 = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}-x)$ $I_8 = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-2x+4}-x)$ $I_9 = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+2}-\sqrt{x-2})$

$I_{10} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-4x+3}-\sqrt{x^2-3x+2})$ $I_{11} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} x(\sqrt{x^2+5}+x)$

$I_{12} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(2x-1-\sqrt{4x^2-4x-3})$ $I_{13} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(3x+2-\sqrt{9x^2+12x-3})$

$I_{14} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2)$ $I_{15} = \lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x-2)$

$I_{16} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-3x+2}+x-1)$ $I_{17} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2-3x+1}-x+3)$

$I_{18} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{4x^2-x+3}-2x+1)$ $I_{19} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3+x^2}-x)$

$I_{20} = \lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-1})$ $I_{21} = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt[3]{x^3+2x-1}-\sqrt{x^2-3x})$

Giới hạn một bên

Bài 1. Tìm các giới hạn sau

$A = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-2x}{3x+1}$ $G = \lim\limits_{x\to2^-}\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ $M = \lim\limits_{x\to0^\pm}\left(x\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}\right)$

$B = \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{3x-1}{2}$ $H = \lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{x^2-3x+3}{x-2}$ $N = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$

$C = \lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ $I = \lim\limits_{x\to4^\pm}\dfrac{x-3}{x-4}$ $O = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^+}\dfrac{\sqrt{1+\cos 2x}}{\frac{\pi}{2}-x}$

$D = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{|x-1|}{x-1}$ $J = \lim\limits_{x\to-2^-}\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+x-2}$

$E = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sqrt{x^2+x^3}}{2x}$ $K = \lim\limits_{x\to-2^+}\dfrac{x^2-3x+3}{x^2+x-2}$

$F = \lim\limits_{x\to0^\pm}\dfrac{2x}{\sqrt{4x^2+x^3}}$ $L = \lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{\sqrt{x^3-3x+2}}{x^2-5x+4}$

Bài 2. Tìm giới hạn bên phải, giới hạn bên trái của hàm số f(x) tại x_o và xét xem hàm số có giới hạn tại x_o không ?

a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1} & (x>1) \\ -\dfrac{x}{2} & (x<1) \end{cases}$ với $x_o = 1$

b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{x-2} & (x<2) \\ 1-2x & (x>2) \end{cases}$ với $x_o = 2$

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} & x>0\\ 3/2 & x\le 0\end{cases}$

với $x_o=0$

Bài 3. Tìm A để hàm số sau có giới hạn tại x_0:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-1}{x-1} & (x<1)\\ Ax+2 & (x\le 1)\end{cases}$ với $x_0=1$

b) $f(x)=\begin{cases}A+\dfrac{\sqrt{x+6}+2x-9}{x^3-4x^2+3x} & x<3\\ 3x^2-2 & x\ge 3\end{cases}$ với $x_0=3$

Giới hạn hàm lượng giác

Tính các giới hạn sau

$A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$

$B=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

$C=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 7x}{x^2}$

$D=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{\sin^2 x}$

$E=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}x-\sin x}{x^3}$

$F=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{3}{\sin 3x}\right)x$

$G=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+\sin x}{3\sin x}$

$H=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sin x-\cos 2x}{\sin x}$

Dạng 3. Tính liên tục hàm số

Bài 1. Xét tính liên tục của các hàm số sau:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1} & x\ne\dfrac{\pi}{6}\\ -3 & x=\dfrac{\pi}{6}\end{cases}$ Nếu

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+3}{x-1} & x\ne 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ Nếu

c) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+5x-6}{x-1} & x\ne 1\\ 7 & x=1\end{cases}$ Nếu

d) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} & x\ne\sqrt{2}\\ 2\sqrt{2} & x=\sqrt{2}\end{cases}$ Nếu

Bài 2. Tìm m để hàm số sau liên tục:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-x-2}{x-2} & x\ne 2\\ m & x=2\end{cases}$ Nếu liên tục tại x=2

b) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-1} & \text{Nếu} \quad x\neq 1\\ m^2 & \quad\quad x=1\end{cases}$ liên tục trên $(0;+\infty)$

Bài 3. Chứng minh rằng các phương trình sau luôn có nghiệm:

a) $x^5-3x-7=0$

b) $(1-m^2)(x+3)^3+x^2-x-3=0$

c) $(1-m^2)x^5-3x-1=0$

d) $2x^3-10x-7=0$ (có ít nhất hai nghiệm)

CHUYÊN ĐỀ 5. ĐẠO HÀM

A. Lý thuyết

1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm

Cho hàm số *y = f(x)* xác định trên khoảng *(a; b)* và $x_0 \in (a; b)$:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0))$$

Nếu hàm số *y = f(x)* có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Ý nghĩa của đạo hàm

Ý nghĩa hình học:

Khi đó phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số *y = f(x)* tại $M(x_0;f(x_0))$ là:

$$y-y_0=f'(x_0).(x-x_0)$$

Ý nghĩa vật lí:

Vận tốc tức thời của chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $s = s(t)$ tại thời điểm t_0 là $v(t_0) = s'(t_0)$.

Cường độ tức thời của điện lượng $Q = Q(t)$ tại thời điểm t_0 là $I(t_0) = Q'(t_0)$.

3. Qui tắc tính đạo hàm

$(C)'=0$ $\qquad (x)'=1$ $\qquad (x^n)'=n.x^{n-1}\ \begin{pmatrix}n\in N\\ n>1\end{pmatrix}$

$\left(\sqrt{x}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $\qquad (ku)'=ku'$ $\qquad \left(\dfrac{1}{v}\right)'=-\dfrac{v'}{v^2}$

$(u\pm v)'=u'\pm v'$ $\qquad (uv)'=u'v+v'u$ $\qquad \left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}\ (v\neq 0)$

Đạo hàm của hàm số hợp: Nếu $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là: $y'_x=y'_u.u'_x$

4. Đạo hàm của hàm số lượng giác

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$; $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin u(x)}{u(x)}=1$ (với $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=0$)

$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

5. Vi phân

- $dy=df(x)=f'(x).\Delta x$
- $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0).\Delta x$

6. Đạo hàm cấp cao

- $f''(x)=[f'(x)]'$; $f'''(x)=[f''(x)]'$; $f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'$ $(n\in N, n\geq 4)$

B. Bài tập

Dạng 1. Dùng định nghĩa để tính đạo hàm

Bài 1. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau tại điểm được chỉ ra:

a) $y=f(x)=2x^2-x+2$ tại $x_0=1$ b) $y=f(x)=\sqrt{3-2x}$ tại $x_0=-3$

c) $y=f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$ tại $x_0=2$ d) $y=f(x)=\sin x$ tại $x_0=\frac{\pi}{6}$

e) $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ tại $x_0=1$ f) $y=f(x)=\frac{x^2+x+1}{x-1}$ tại $x_0=0$

Bài 2. Dùng định nghĩa tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $f(x)=x^2-3x+1$ c) $f(x)=\sqrt{x+1}, (x>-1)$ e) $f(x)=\frac{1}{\cos x}$

b) $f(x)=x^3-2x$ d) $f(x)=\frac{1}{2x-3}$

Dạng 2. Dùng công thức để tính đạo hàm

Bài 1. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\frac{1}{2}x^5+\frac{2}{3}x^4-x^3-\frac{3}{2}x^2+4x-5$ b) $y=\frac{1}{4}-\frac{1}{3}x+x^2-0,5x^4$

c) $y=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x$; d) $y=x^5-4x^3+2x-3\sqrt{x}$

e) $y=\frac{x}{a}+\frac{b}{x^2}+c\sqrt{x}+\frac{a^2}{2}-\sqrt[3]{b}$ $(a,b,c$ là hằng số$)$.

Bài 2. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=(2x-3)(x^5-2x)$ c) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

b) $y=x(2x-1)(3x+2)$

d) $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$

e) $y=\dfrac{3}{2x-5}$

f) $y=\dfrac{x^2+x-1}{x-1}$

g) $y=\dfrac{2x^2-4x+5}{2x+1}$

h) $y=x+1-\dfrac{2}{x+1}$

i) $y=\dfrac{5x-3}{x^2+x+1}$

j) $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$.

Bài 3. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=(2x^3-3x^2-6x+1)^2$

b) $y=(x^2-x+1)^3(x^2+x+1)^2$

c) $y=\sqrt{1+2x-x^2}$

d) $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

e) $y=\sqrt[3]{\left(\dfrac{2x-1}{x+3}\right)^2}$

f) $y=\dfrac{1}{(x^2-x+1)^5}$

g) $y=\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$

h) $y=\sqrt{x^2+1}-\sqrt{1-x^2}$

i) $y=\sqrt[3]{x^3-3x+1}$

j) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^5$

Bài 4. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=2x^4-\dfrac{1}{3}x^3+2\sqrt{x}-5$

b) $y=\dfrac{3}{x^2}-\sqrt{x}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$.

c) $y=(x^3-2)(1-x^2)$

d) $y=(x^2+3x)(2-x)$

e) $y=\left(\sqrt{x}+1\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}-1\right)$

f) $y=\dfrac{3}{2x+1}$

g) $y=\dfrac{2x+1}{1-3x}$

h) $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

i) $y=\dfrac{x^2-3x+3}{x-1}$

j) $y=\dfrac{2x^2-4x+1}{x-3}$

k) $y=\dfrac{2x^2}{x^2-2x-3}$

Bài 5. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=(x^2+x+1)^4$

b) $y=(1-2x^2)^5$

c) $y=\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^3$

d) $y=\dfrac{(x+1)^2}{(x-1)^3}$

e) $y=\dfrac{1}{(x^2-2x+5)^2}$

f) $y=\left(3-2x^2\right)^4$

Bài 6. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\sqrt{2x^2-5x+2}$

b) $y=\sqrt[3]{x^3-x+2}$

c) $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$

d) $y=(x-2)\sqrt{x^2+3}$

e) $y=\dfrac{4x+1}{\sqrt{x^2+2}}$

f) $y=\dfrac{\sqrt{4+x^2}}{x}$

g) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$

h) $y=\sqrt{(x-2)^3}$

i) $y=\left(1+\sqrt{1-2x}\right)^3$

Bài 7. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\dfrac{\sin x}{x}+\dfrac{x}{\sin x}$

b) $y=\dfrac{\sin^3 x+\cos^3 x}{\sin x+\cos x}$

c) $y=4\sin x\cos 5x.\sin 6x$

d) $y=4\sin x\cos 5x.\sin 6x$

e) $y=\dfrac{\sin 2x+\cos 2x}{\sin 2x-\cos 2x}$

f) $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x-x\sin x}$

g) $y=\tan\dfrac{x+1}{2}$

h) $y=\tan 3x-\cot 3x$

i) $y=\dfrac{1+\tan^2 x}{1-\tan^2 x}$

j) $y=\cot\sqrt{x^2+1}$

k) $y=\cos^4 x+\sin^4 x$

m) $y=(\sin x+\cos x)^3$

n) $y=\sin^3 2x\cos^3 2x$

o) $y=\sin\left(\cos 3x\right)$

p) $y=\sin^2\left[\cos^2\left(\cos 3x\right)\right]$

q) $y=\cot^5\left[\cos^2\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^2\right]$.

Bài 8. Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}\right)^2$

b) $y=x.\cos x$

c) $y=\sin^3(2x+1)$

d) $y=\sqrt{\cot 2x}$

e) $y=\sin\sqrt{2+x^2}$

f) $y=\sqrt{\sin x+2x}$

g) $y=\tan 2x+\dfrac{2}{3}\tan^3 2x+\dfrac{1}{5}\tan^5 2x$

h) $y=2\sin^2 4x-3\cos^3 5x$

i) $y=(2+\sin^2 2x)^3$

k) $y=\sin\left(\cos^2 x\tan^2 x\right)$

l) $y=\cos^2\left(\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right)$

Bài 9. a) Cho hàm số $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$. Tính $f'(0); f'(\pi); f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right); f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

b) Cho hàm số $y=f(x)=\dfrac{\cos^2 x}{1+\sin^2 x}$. Chứng minh: $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)-3f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=3$

Bài 6. Tìm đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y=3\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)-2\left(\sin^6 x+\cos^6 x\right)$

b) $y=\cos^4 x\left(2\cos^2 x-3\right)+\sin^4 x\left(2\sin^2 x-3\right)$

c) $y=3\left(\sin^8 x-\cos^8 x\right)+4\left(\cos^6 x-2\sin^6 x\right)+6\sin^4 x$

d) $y=\dfrac{\sin^4 x+3\cos^4 x-1}{\sin^6 x+\cos^6 x+3\cos^4 x-1}$

e) $y=\cos^2 x+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\dfrac{2\pi}{3}-x\right)$

f) $y=\dfrac{\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{x}{2}\right).(1+\sin x)}{\sin x}$

g) $y=\dfrac{\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x}{\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x}$;

h) $y=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+2\cos x}}}$, $\left(x\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$.

Dạng 3. Dùng công thức đạo hàm để giải phương trình

Bài 1. Giải phương trình $y'=0$ biết:

a) $y=\sin 2x-2\cos x$;

b) $y=3\sin 2x+4\cos 2x+10x$;

c) $y=\cos^2 x+\sin x$;

d) $y=(m-1)\sin 2x+2\cos x-2mx$.

Bài 2. Cho hàm số $y=\dfrac{1}{3}x^3-(2m+1)x^2+mx-4$. Tìm m để:

a) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt

b) y' có thể viết được thành bình phương của nhị thức;

c) $y'\geq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$; d) $y'<0$, $\forall x\in(1;2)$; e) $y'>0$, $\forall x>0$.

Bài 3. Cho hàm số $y=-\dfrac{1}{3}mx^3+(m-1)x^2-mx+3$. Xác định m để:

a) $y'\leq 0$, $\forall x\in\mathbb{R}$.

b) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt cùng âm;

c) Phương trình $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn điều kiện: $x_1^2+x_2^2=3$.

Bài 4. Cho hàm số $y=\dfrac{mx^2+6x-2}{x+2}$. Xác định m để hàm số có $y'\leq 0$, $\forall x\in(1;+\infty)$.

Bài 5. Cho hàm số $y=mx^4+(m^2-9)x^2+10$ (1) (m là tham số). Xác định m để hàm số có $y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt.

Dạng 4. Viết phương trình tiếp tuyến của ĐTHS

Bài 1. Cho hàm số (C): $y=f(x)=x^2-2x+3$. Viết phương trình tiếp với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 1$.
b) Song song với đường thẳng $4x – 2y + 5 = 0$.
c) Vuông góc với đường thẳng $x + 4y = 0$.
d) Vuông góc với đường phân giác thứ nhất của góc hợp bởi các trục tọa độ.

Bài 2. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{2 - x + x^2}{x - 1}$ (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm M(2; 4).
b) Viết phương trình ttiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc k = 1.

Bài 3. Cho hàm số $y = f(x) = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$ (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A(2; –7).
b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành.
c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung.
d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với d: $y = \dfrac{1}{2}x + 100$.
e) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với Δ: $2x + 2y – 5 = 0$.

Bài 4. Cho hàm số (C): $y = x^3 - 3x^2$.

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm I(1, –2).
b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I.

Bài 5. Cho hàm số (C): $y = \sqrt{1 - x - x^2}$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = \dfrac{1}{2}$.
b) Song song với đường thẳng $x + 2y = 0$.

Bài 6. Cho hàm số $(C): y = x^2 - 2x + 3$. Viết phương trình tiếp với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = 2$;
b) Biết tiếp tuyến song song với đường thẳng: $4x - y - 9 = 0$;
c) Vuông góc với đường thẳng: $2x + 4y - 2011 = 0$;
d) Biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(1; 0)$.

Bài 7. Cho hàm số : $y = \dfrac{3x + 1}{1 - x}$ (C).

a) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1; -1)$;

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục hoành;

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại giao điểm của (C) với trục tung;

d) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): 4x - y + 1 = 0$;

Bài 8. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 4x + y - 8 = 0$.

Bài 9. Cho hàm số: $y = x^3 - 3x^2 \quad (C)$

a) Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $I(1; -2)$.

b) Chứng minh rằng các tiếp tuyến khác của đồ thị (C) không đi qua I.

Bài 10. Cho hàm số $y = \sqrt{1 - x - x^2} \quad (C)$. Tìm phương trình tiếp tuyến với (C):

a) Tại điểm có hoành độ $x_0 = \frac{1}{2}$;

b) Song song với đường thẳng: $(d): x + 2y = 0$.

Bài 11. Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3 + 4 \ (C)$, m là tham số thực. Tìm các giá trị của m để tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = -1$ đi qua điểm $A(1; 2)$.

Bài 12. Cho hàm số $y = \frac{3x+1}{x+1}$ (1). Tính diện tích của tam giác tạo bởi các trục tọa độ và tiếp tuyến của đồ thị của hàm số (1) tại điểm $M(-2; 5)$.

Bài 13. Cho hàm số $y = \sqrt{3}x^3 + 4 \ (C)$. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng $(d): \sqrt{3}y - x + 6 = 0$ góc 30^0.

Bài 14. Cho hàm số $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 5 \ (C)$. Trong tất cả các tiếp tuyến của đồ thị (C), hãy tìm tiếp tuyến có hệ số góc lớn nhất.

Bài 15. Cho hàm số $y = \frac{2x-1}{x-1} \quad (C)$. Gọi $I(1; 2)$, tìm điểm $M \in (C)$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM.

PHẦN HÌNH HỌC

CHUYÊN ĐỀ 1. PHÉP DỜI HÌNH VÀ PHÉP ĐỒNG DẠNG

A. Lý thuyết

a) Phép tịnh tiến

- Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$
- Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M'$ và $T_{\vec{v}}(N) = N' \Leftrightarrow \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN} \Rightarrow MN = M'N'$
- Phép tịnh tiến theo vectơ – không chính là phép đồng nhất tức là $\begin{cases} x' = x \\ y' = y \end{cases}$
- $T_{\vec{v}}(d) = d \Leftrightarrow \vec{v}$ và $\vec{v'}$ cùng phương
- Biểu thức tọa độ: Nếu $T_{\vec{v}}(M) = M' \Rightarrow M'(x_M + a;\ y_M + b)$

hoặc $M' = \begin{cases} x_{M'} = x_M + a \\ y_{M'} = y_M + b \end{cases}$ với $\vec{v} = (a; b)$

Phép tịnh tiến:

- Biến đường thẳng thành đường thẳng song song hoặc trùng với nó;
- Biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng bằng nó;
- Biến tam giác thành tam giác bằng nó;
- Biến đường tròn thành đường tròn có cùng bán kính.

b) Phép quay

- Phép quay tâm O, góc 90^0: $Q_{(O,90^0)}(M) = M' = \begin{cases} x' = -y \\ y' = x \end{cases}$
- Phép quay tâm O, góc -90^0: $Q_{(O,-90^0)}(M) = M' = \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

c) Phép vị tự

Cho điểm O và một số $k \neq 0$. Phép biến hình biến mỗi điểm M thành một điểm M’ sao cho $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ được gọi là phép vị tự tâm, tỉ số vị tự là k.

$$V_{(O,k)} : M \to M' \text{ hay } M' = V_{(O,k)}(M) \Leftrightarrow M = V_{\left(O,\frac{1}{k}\right)}(M')$$

Trên mặt phẳng xOy biết tâm vị tự có tọa độ I(x_0 ; y_0) và điểm M (x ; y) thì tọa độ của $M'(x' ; y')$ được xác định biểu thức tọa độ của phép vị tự là:

$$\begin{cases} x' = kx + (1-k).x_0 \\ y' = ky + (1-k).y_0 \end{cases}$$

B. Bài tập

Dạng 1. Bài toán với phép tịnh tiến

Bài 1. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$. Xác định điểm D sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AG}$ biến D thành A.

Bài 2. Tìm ảnh của các điểm A(0; 2), B(1; 3) qua phép tịnh tiến $T_{\vec{v}}$ trong các trường hợp sau:

a) $\vec{v}=(1;1)$ b) $\vec{v}=(-2;1)$ c) $\vec{v}=(0;0)$

Bài 3. Cho điểm A(1; 4). Tìm tọa độ của điểm B sao cho $A=T_{\vec{v}}(B)$ biết:

a) $\vec{v}=(2;-3)$ b) $\vec{v}=(-3;1)$ c) $\vec{v}=(0;0)$

Bài 4. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ sao cho $M'=T_{\vec{v}}(M)$, biết:

a) M(-1; 0), $M'(3; 8)$ b) M(-5; 2), $M'(4; -3)$ c) M(-1; 2), $M'(4; 5)$

Bài 5. Tìm ảnh của d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$, biết:

a) d: x + 3y – 1 = 0 với $\vec{v}=(2;-1)$ b) d: 2x – y – 1 = 0 với $\vec{v}=(2;-1)$

Bài 6. Tìm phương trình đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$: d biến thành d', biết d': 2x + 3y – 1 = 0 với $\vec{v}=(-2;-1)$

Bài 7. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$ sao cho $T_{\vec{v}}(d)=d'$ với d: 3x – y + 1 = 0 và d': 3x – y – 7 = 0

Bài 8. Tìm tọa độ vectơ $\vec{v}$ sao cho $T_{\vec{v}}(C)=(C')$

a) (C): $(x-2)^2+(y+3)^2=4$ và (C'): $(x+5)^2+(y-1)^2=4$

b) (C): $x^2+y^2-2x+4y+2=0$ và (C'): $x^2+y^2+4x-6y+10=0$

Bài 9. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo $\vec{v}$, biết:

a) (C): $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ với $\vec{v}=(3;-4)$

b) (C): $(x+3)^2+(y-1)^2=4$ với $\vec{v}=(-3;1)$

Bài 10. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;m)$. Tìm m để đường thẳng d: 4x + 6y – 1= 0 biến thành chính nó qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Bài 11. Cho hình bình hành ABCD. Dựng ảnh của tam giác ABC qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AD}$. Xác định điểm F sao cho phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{AC}$ biến F thành A.

Bài 12. Cho hình chữ nhật ABCD. Gọi M, N, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD, AD, MN. Hãy tìm một phép tịnh tiến biến ΔAFM thành ΔENF.

Bài 13. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, biết:

a) A(2; -3) với $\vec{v}=(7;2)$ b) B(8; 2) với $\vec{v}=(-7;4)$

c) C(1; 2) với $\vec{v}=(-4;3)$ d) D(-5; -6) với $\vec{v}=(4;-9)$

Bài 14. Tìm tọa độ của điểm C sao cho A(3; 5) là ảnh của C qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-1;2)$.

Bài 15. Tìm tọa độ của điểm M qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;-5)$, biết $T_{\vec{v}}(M)=N$ và N(-7; 2).

Bài 16. Cho điểm D(-5; 6). Tìm tọa độ của điểm E sao cho D là ảnh của E qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;-8)$.

Bài 17. Cho điểm A(1; 4). Tìm tọa độ điểm B sao cho $A=T_{\vec{v}}(B)$ với $\vec{v}=(-3;9)$.

Bài 18. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ sao cho $T_{\vec{v}}(A)=B$, biết:

a) A(-10; 1), B(3; 8) b) A(-5; 2), B(4; -3) c) A(-1; 2), B(4; 5)

d) A(0; 0), B(-3; 4) e) A(5; -2), B(2; 6) f) A(2; 3), B(4; -5)

Bài 19. Cho đường thẳng d: 2x – y + 5 = 0. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(4;-3)$.

Bài 20. Cho đường thẳng d: x – 4y – 2 = 0. Tìm phương trình đường thẳng d' sao cho $T_{\vec{v}}(d)=d'$ với $\vec{v}=(-2;5)$.

Bài 21. Cho đường thẳng d: 5x + 3y + 5 = 0. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(-2;-1)$.

Bài 22. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}=(3;7)$, biết: đường thẳng d: 4x – y – 3 = 0.

Bài 23. Tìm đường thẳng d qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$: d biến thành d':

a) d': 2x + 3y – 1 = 0 với $\vec{v}=(-2;-1)$ b) d': 2x – 4y – 1 = 0 với $\vec{v}=(3;-1)$

c) d': x – 6y + 2 = 0 với $\vec{v}=(-2;4)$ d) d': 5x – 3y + 5 = 0 với $\vec{v}=(-2;-3)$

Bài 24. Tìm ảnh của (C) qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$, biết:

a) (C): $x^2+y^2-4x+2y-3=0$ với $\vec{v}=(3;-4)$

b) (C): $x^2+y^2+6x-4y+1=0$ với $\vec{v}=(-3;-5)$

c) (C): $(x-2)^2+(y+5)^2=16$ với $\vec{v}=(-1;4)$

d) (C): $(x+4)^2+(y-1)^2=9$ với $\vec{v}=(5;3)$

Bài 25. Tìm tọa độ của vectơ $\vec{v}$ sao cho $T_{\vec{v}}(d)=d'$ và $T_{\vec{v}}(C)=(C')$, biết:

a) d: 3x – 2y + 1 = 0 và d': 3x – 2y – 4 = 0

b) d: 2x + y – 5 = 0 và d': 2x + y + 3 = 0

c) (C): $(x+3)^2+(y-2)^2=4$ và (C'): $(x-5)^2+(y-7)^2=4$

d) (C): $(x-5)^2+(y+4)^2=8$ và (C'): $(x+2)^2+(y-9)^2=8$

Bài 26. Phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3m; -6)$. Tìm m để đường thẳng d: 4x + 2y – 7 = 0 biến thành chính nó qua phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v}$.

Dạng 2. Bài toán với phép quay

Bài 1. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép quay tâm O, góc 90^0 biết:

a) A(3; -4) b) B(-2; 1) c) C(4; 5) d) D(-2; -3) e) E(0; -5)

Bài 2. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép quay tâm O, góc -90^0 biết:

a) A(2; 5) b) B(-4; 2) c) C(-3; -1)

Bài 3. Tìm tọa độ của điểm A sao cho $Q_{(O,90^0)}(A) = B$, biết:

a) B(3; -5) b) B(-2; 7) c) B(-3; -1) d) B(4; 6)

Bài 4. Tìm tọa độ của điểm C sao cho D là ảnh của C qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, biết:

a) D(-5; 1) b) D(-4; -7) c) D(2; 3) d) D(4; -8)

Bài 5. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay 90^0, biết đường thẳng d: 5x – 2y – 2 = 0.

Bài 6. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, biết đường thẳng d: 2x – 5y + 1 = 0.

Bài 7. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay 90^0, biết

a) (C): $(x – 2)^2 + (y + 5)^2 = 9$ b) $x^2 + y^2 – 4x + 2y – 4 = 0$

Bài 8. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, biết: $(x + 4)^2 + (y – 1)^2 = 16$.

Bài 9. Cho tam giác ABC, trọng tâm G

a) Tìm ảnh của điểm B qua phép quay tâm A góc quay 90^0
b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm A góc quay 90^0
c) Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép quay tâm G góc quay 90^0

Bài 10. Cho ΔABC đều có tâm O và phép quay tâm O, góc quay 120^0.

a) Xác định ảnh của các đỉnh A, B, C qua phép quay $Q_{(O,120^0)}$
b) Tìm ảnh của ΔABC qua phép quay $Q_{(O,120^0)}$

Bài 11. Cho hình vuông ABCD tâm O

a) Tìm ảnh của điểm C qua phép quay tâm A, góc quay 90^0
b) Tìm ảnh của đường thẳng BC qua phép quay tâm O, góc quay 90^0

Bài 12. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép quay tâm O, góc 90^0, biết:

a) A(4; -2) b) B(-5; 3) c) C(-6; -7) d) D(2; 9)

Bài 13. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép quay tâm O, góc -90^0 biết:

a) E(3; 5) b) F(-4; 6) c) M(7; -2) d) N(-3; -8)

Bài 14. Tìm tọa độ của điểm M sao cho $Q_{(O,90^0)}(M) = N$, biết:

a) N(-3; 2) b) N(4; -7) c) N(-5; -1) d) N(5; 9)

Bài 15. Tìm tọa độ của điểm E sao cho F là ảnh của E qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, biết:

a) F(4; 7) b) F(3; -2) c) F(5; -6) d) F(-3; -8)

Bài 16. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay 90^0, biết:

a) d: $2x - 3y + 2 = 0$ b) d: $3x + y = 0$

c) d: $y - 3 = 0$ d) d: $x + 1 = 0$

e) d: $-4x + 2y + 3 = 0$ f) d: $2x + 5y - 2 = 0$

g) d: $x - 7y - 3 = 0$

Bài 17. Tìm ảnh của đường thẳng d qua phép quay tâm O, góc quay -90^0, biết:

a) d: $x + 3y - 1 = 0$ b) d: $2x - y + 5 = 0$ c) d: $3x - 2y = 0$

Bài 18. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay 90^0 biết

a) (C): $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$ b) (C): $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

c) (C): $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$ d) (C): $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$

Bài 19. Tìm ảnh của đường tròn (C) qua phép quay tâm O, góc quay -90^0 biết:

a) (C): $(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16$ b) (C): $(x + 3)^2 + y^2 = 25$

c) (C): $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ d) (C): $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 8 = 0$

Bài 20. Cho tam giác ABC và điểm O. Xác định ảnh của tam giác đó qua phép quay tâm O góc 60^0.

Bài 21. Cho hình bình hành ABCD và tâm O.

a) Tìm ảnh của OC qua phép quay tâm B, góc quay 90^0

b) Tìm ảnh của ΔAOB qua phép quay tâm O, góc quay -90^0

Bài 22. Cho hình vuông ABCD có tâm O theo chiều âm

a) Tìm ảnh của điểm A qua phép quay tâm C, góc quay -90^0

b) Tìm ảnh của đường thẳng AD qua phép quay tâm O, góc quay 90^0

Bài 23. Cho tam giác đều ABC, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tìm một phép quay biến ΔABC thành chính nó.

Bài 24. Cho hình vuông ABCD tâm O. Tìm một phép quay biến hình vuông ABCD thành chính nó.

Bài 25. Cho ΔABC. Về phía ngoài tam giác, dựng ba tam giác đều BCA_1, ACB_1, ABC_1

a) Tìm một phép quay biến ΔAC_1C thành ΔABB_1

b) Tìm một phép quay biến ΔACA_1 thành ΔB_1CB

Dạng 3. Bài toán với phép vị tự

Bài 1. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm O, tỉ số k, biết:

a) A(-3; 4), k = -2 b) B(2; -6), k = $\frac{1}{2}$

c) C(4; 5), k = 3 d) D(-3; -12), k = $-\frac{2}{3}$

Bài 2. Tìm tọa độ của điểm A sao cho B là ảnh của A qua phép vị tự tâm O, tỉ số k, biết:

a) B(-2; 6), k = 2 b) B(0; 3), k = $\frac{1}{3}$

c) B(3; -1), k = -3 d) B(-5; -2), k = $-\frac{1}{2}$

Bài 3. Tìm tỉ số k, biết $V_{(O,k)}(A) = A'$ biết:

a) A(-2; 4), A'(1; -2) b) A(4; 5), A'(-8; -10)

c) A(-3; -8), A'(-9; -24)

Bài 4. Tìm ảnh của các đt d sau qua phép vị tự tâm O, tỉ số k biết:

a) d: 4x – 3y + 1 = 0, k = -3 b) d: x – 4y + 2 = 0, k = $\frac{1}{2}$

Bài 5. Tìm ảnh của các đường tròn (C) sau qua phép vị tự tâm O, tỉ số k biết:

a) (C): $(x-2)^2 + (y+4)^2 = 1$, k = $-\frac{1}{2}$

b) (C): $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$, k = 4

Bài 6. Cho tam giác ABC. Tìm ảnh của B, C qua phép vị tự tâm A, tỉ số k biết:

a) k = $\frac{1}{2}$ b) k = 2 c) k = $-\frac{2}{3}$

Bài 7. Cho hình bình hành ABCD (theo chiều âm) có tâm O. Tìm ảnh của hình bình hành ABCD qua phép vị tự tâm O, tỉ số k = 2.

Bài 8. Tìm ảnh của các điểm sau qua phép vị tự tâm O, tỉ số k biết:

a) A(-3; 5), tỉ số k = -3 b) B(4; -1), tỉ số k = 2

c) C(-1; 3), tỉ số k = 4 d) D(-2; -8), tỉ số k = $-\frac{1}{2}$

e) E(3; 9), k = $\frac{2}{3}$ f) F(3; -7), tỉ số k = $\frac{1}{3}$

Bài 9. Tìm tọa độ của điểm E sao cho F là ảnh của E qua phép vị tự tâm O, tỉ số k biết:

a) F(-2; 8), tỉ số k = 2 b) F(3; -2), tỉ số k = $\frac{1}{2}$

c) F(5; 1), tỉ số k = $-\frac{1}{4}$

Bài 10. Tìm ảnh của các đt d sau qua phép vị tự tâm O, tỉ số k biết:

a) d: 5x – 2y + 2 = 0, tỉ số k = 3 b) d: 3x + y – 4 = 0, tỉ số k = -2

c) d: 4x – y = 0, tỉ số $k = \frac{1}{3}$ d) d: x + 3y – 2 = 0, tỉ số k = $-\frac{2}{3}$

Bài tập tổng hợp

Bài 1. Trong mặt phẳng Oxy cho 2 điểm A(3;-2) và B(-1;5); đường thẳng d: 2x + 3y – 5 = 0

a) Xác định ảnh của điểm A và đường thẳng d qua Phép tịnh tiến theo $\vec{v} = (2;-1)$

b) Xác định điểm M sao cho $B = T_{\vec{v}}(M)$.

Bài 2. Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ: 3x – 5y + 1 = 0 và đường tròn (C) $(x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 9$. Xác định ảnh của Δ và đường tròn qua phép quay tâm O góc quay 90^0 .

Bài 3. Trong mặt phẳng Oxy cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 1 = 0$. Xác định ảnh của đường tròn qua:

a) Phép vị tự tâm O tỉ số k = 2

b) Phép đồng dạng khi thực hiện liên tiếp phép quay tâm O góc quay 90^0 và phép $V_{(O,-3)}$.

Bài 4.

a) Tìm tọa độ của C' là ảnh của điểm C(3; -2) bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (-2;4)$ và phép vị tự tâm O, tỉ số 2.

b) Tìm tọa độ ảnh của điểm D(-5; 1) bằng cách thực hiện liên tiếp phép tịnh tiến theo vectơ $\vec{v} = (3;2)$ và phép quay tâm O, góc 90^0.

c) Tìm tọa độ của E' là ảnh của điểm E(5; 2) bằng cách thực hiện liên tiếp phép vị tự tâm O, tỉ số -3 và phép quay tâm O, góc - 90^0.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD tâm O, M là trung điểm của AB, N là trung điểm của OA. Tìm ảnh của ΔAMN qua phép quay tâm O, góc quay 90^0.

Bài 6. Cho hình lục giác đều ABCDEF theo chiều dương, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó. Tìm ảnh của ΔOAB qua phép dời hình có được bằng cách thực hiện liên tiếp phép quay tâm O, góc quay 60^0 và qua phép tịnh tiến theo vectơ $\overrightarrow{OE}$.

Bài 7. Cho hình lục giác đều ABCDEF theo chiều dương, O là tâm đường tròn ngoại tiếp của nó. I là trung điểm của AB.

a) Tìm ảnh của ΔAIF qua phép quay $Q_{(O,120^0)}$

b) Tìm ảnh của Δ AOF qua phép quay $Q_{(E,60^0)}$

Bài 8. Cho hai hình vuông ABCD và BEFG. Tìm ảnh của Δ ABG trong phép quay tâm B, góc quay -90^0.

Bài 9. Tìm ảnh của các đường tròn (C) sau qua phép vị tự tâm O, tỉ số k, biết:

a) (C): $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$, tỉ số k = -3

b) (C): $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 2 = 0$, tỉ số k = 4

c) (C): $(x + 2)^2 + (y - 8)^2 = 9$, tỉ số k = $\frac{1}{2}$

d) (C): $x^2 + y^2 + 6x - 18y + 3 = 0$, tỉ số k = $-\frac{1}{3}$

Bài 10. Cho tam giác ABC vuông tại A, G là trọng tâm của tam giác. Tìm ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự:

a) Tâm G, tỉ số k = $\frac{1}{2}$ b) Tâm G, tỉ số k = 2 c) Tâm A, tỉ số k = -2

Bài 11. Cho tam giác ABC, G là trọng tâm tam giác. Gọi D, E, F theo thứ tự là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Xác định ảnh của tam giác ABC qua phép vị tự tâm G, tỉ số k = $\frac{1}{2}$.

CHUYÊN ĐỀ 2. ĐẠI CƯƠNG VỀ ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẲNG TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 1. Bài toán về giao tuyến

A. Lý thuyết

Cơ sở của phương pháp tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (α) và (β) cần thực hiện:

- *Bước 1: Tìm hai điểm chung A và B của (α) và (β).*
- *Bước 2: Đường thẳng AB là giao tuyến cần tìm ($AB = (\alpha) \cap (\beta)$).*

B. Bài tập

Bài 1. Cho S là một điểm không thuộc mặt phẳng chứa hình bình hành ABCD.

a) Tìm giao tuyến của (SAC) và (SBD).

b) Gọi N là trung điểm BC. Tìm giao tuyến của (SAN) và (ACD).

Bài 2. Cho hình bình hành ABCD và điểm M không nằm trong mặt phẳng chứa hình bình hành ABCD.

a) Tìm giao tuyến của (MAC) và (MBD).

b) Gọi N là trung điểm BC. Tìm giao tuyến của (AMN) và (ACD); (AMN) và (MCD).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang (AB // CD và AB > CD). Tìm giao tuyến của các mặt phẳng:

a) (SAB) và (ABCD) b) (SAD) và (SBC); c) (SAC) và (SBD).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là tứ giác lồi (AB > CD).

a) Tìm giao tuyến của các mặt phẳng: (SAC) và (SBD), (SBC) và (SCD), (SAD) và (SBC).

b) Gọi N là trung điểm của BC. Tìm giao tuyến của (SAN) và (ACD), (SAN) và (SCD).

c) Gọi H thuộc SD sao cho DH > SH và K thuộc SC sao cho KS > KC. Tìm giao tuyến của (AHK) với các mặt phẳng (SCD), (ABCD), (SAB).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là tứ giác có các cạnh đối diện không song song. Lấy điểm M thuộc miền trong tam giác SCD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau:

a) (SBM) và (SCD) b) (ABM) và (SCD)

c) (ABM) và (SAC) d) (ABM) và (SAD)

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang nhận cạnh AB làm đáy lớn. Gọi E, F là trung điểm SA, SC. M là một điểm tùy ý trên SD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau:

a) (SAC) và (SBD) b) (SAD) và (SBC) c) (MEF) và (MAB)

Bài 7. Cho tứ diện ABCD với I là trung điểm BD. Gọi E, F là trọng tâm của các tam giác ABD và CBD. Tìm giao tuyến của các mặt phẳng sau:

a) (IEF) và (ABC) b) (IAF) và (BEC).

Bài 8. Cho tứ diện ABCD với I là trung điểm cạnh AD. Gọi M, N là hai điểm tùy ý trên AB, AC. Tìm giao tuyến của (IBC) và (DMN).

Bài 9. Cho bốn điểm không đồng phẳng A, B, C, D. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AD và BC.

a) Xác định giao tuyến của (MBC) và (DNA).

b) Cho I, J lần lượt là hai điểm nằm trên AB và AC. Xác định giao tuyến của (MBC) và (IJD).

Bài 10. Cho tứ diện ABCD và điểm M thuộc miền trong tam giác ACD. Gọi I, J tương ứng là hai điểm trên cạnh BC và BD sao cho IJ không song song với CD.

a) Tìm giao tuyến của (IJM) và (ACD).

b) Lấy điểm N thuộc miền trong của tam giác ABD sao cho JN cắt AB tại L. Tìm giao tuyến của (MNJ) và (ABC).

Bài 11. Cho hình chóp S.AECD, đáy ABCD có AB cắt CD tại E, AC cắt BD tại F.

a) Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (SAB) và (SCD), (SAC) và (SBD).

b) Tìm giao tuyến của (SEF) với các mặt phẳng (SAD), (SBC).

Bài 12. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là các điểm nằm trên AB, AD với AI = ½ IB, AJ = 3/2 JD. Tìm giao tuyến của (CIJ) và (BCD).

Bài 13. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J và K lần lượt là các điểm trên cạnh AB, BC và CD sao cho $AI = \frac{1}{3}AB$, $BJ = \frac{2}{3}BC$, $CK = \frac{4}{3}CD$. Tìm giao tuyến của (IJK) với (ABD).

Bài 14. Cho hình bình hành ABCD và S không nằm trong mặt phẳng chứa hình bình hành. Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của AB, BC, SD. Tìm giao tuyến của (MNE) với các mặt phẳng (SAD), (SCD), (SAB), (SBC).

Bài 15. Cho hình bình hành ABCD và S không nằm trong mặt phẳng chứa hình bình hành. Gọi M, E lần lượt là trung điểm của AB, SD. N là điểm đối xứng với B qua C. Tìm giao tuyến của (MNE) với các mặt phẳng (SCD), (SBD), (SAD) và (SAB).

Bài 16. Trong mặt phẳng (P) cho tứ giác lồi ABCD có các cạnh đối diện không song song. M là một điểm không nằm trong mặt phẳng (P). Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng sau:

a) (MAB) và (MCD) b) (MAD) và (MBC).

Bài 17. Cho tứ diện ABCD. M là một điểm bên trong tam giác ABD, N là một điểm bên trong tam giác ACD. Tìm giao tuyến của các cặp mặt phẳng (AMN) và (BCD), (DMN) và (ABC).

Bài 18. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AD, BC.

a) Tìm giao tuyến của (IBC) với (JAD).

b) Gọi M là một điểm trên cạnh AB, N là một điểm trên cạnh AC. Tìm giao tuyến của hai mặt phẳng (IBC) và (DMN).

Bài 19. Cho hình chóp S.ABC. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SA, N là điểm nằm trên cạnh SB và P là điểm nằm trong mặt phẳng (SBC). Tìm giao tuyến của (MNP) với (SAC).

Bài 20. Cho hình chóp S.ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là các điểm nằm trên SA, SB, SD. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (ABCD), (SBC), (SCD) và (SAD).

Bài 21. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của BC, CD, SO. Tìm giao tuyến của mặt phẳng (MNP) với các mặt phẳng (SAB), (SAD), (SBC) và (SCD).

Bài 22. Cho tứ diện ABCD có I, J lần lượt là trung điểm của AC, BC, K là điểm thuộc BD sao cho KD < KB. Tìm giao tuyến của:

a) (IJK) và (ACD) b) (IJK) và (ABD).

Bài 23. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, SD. Điểm P là điểm thuộc SC sao cho PC < PS. Tìm giao tuyến của:

a) (SAC) và (SBD) b) (MNP) và (SBD) c) (MNP) và (SAC)

d) (MNP) và (SAB) e) (MNP) và (SAD) f) (MNP) và (ABCD).

Bài 24. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang với AD là đáy lớn. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của BC, CD. Tìm giao tuyến của:

a) (SAC) và (SBD) b) (SMN) và (SAD) c) (SAB) và (SCD)

d) (SMN) và (SAC) e) (SMN) và (SAB)

Bài 25. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành. Gọi I, J, K lần lượt là trung điểm của BC, CD, SA. Tìm giao tuyến của:

a) (IJK) và (SAB) b) (IJK) và (SAD)

c) (IJK) và (SBC) d) (IJK) và (SBD).

Bài 26. Cho tứ diện ABCD có M, N, P lần lượt nằm trên cạnh AB, AC, BD sao cho MN không song song với BC và MP không song song với AD. Tìm giao tuyến của:

a) (MNP) và (ABC) b) (MNP) và (BCD) c) (MNP) và (ACD).

Bài 27. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang đáy lớn AD. Gọi I là trung điểm của SA, J là điểm thuộc AD sao cho JD = ¼ AD, K là điểm thuộc SB sao cho SK = 2.BK. Tìm giao tuyến:

a) (IJK) và (ABCD) b) (IJK) và (SBD) c) (IJK) và (SBC).

Bài 28. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình bình hành tâm O. Lấy N, M lần lượt thuộc SA, SB sao cho BM = ¼. BS, SN = ¾. SA. Tìm giao tuyến của:

a) (OMN) và (SAB) b) (OMN) và (SAD)

c) (OMN) và (SBC) d) (OMN) và (SCD).

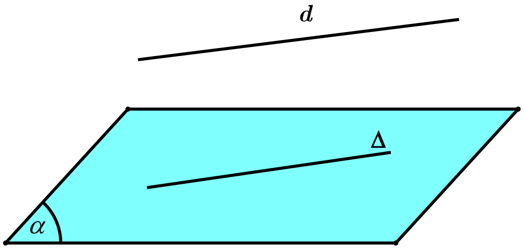
Dạng 2. Bài toán đường thẳng song song với mặt phẳng

A. Lý thuyết

Phương pháp 1

Cơ sở của phương pháp là dùng điều kiện cần và đủ để chứng minh đường thẳng d song song với mặt phẳng (α).

- *Bước 1: Quan sát và quản lí giả thiết tìm đường thẳng ưu việt* $\Delta \subset (\alpha)$ *và chứng minh* $d \,//\, \Delta$.
- *Bước 2: Kết luận* $d \,//\, (\alpha)$.



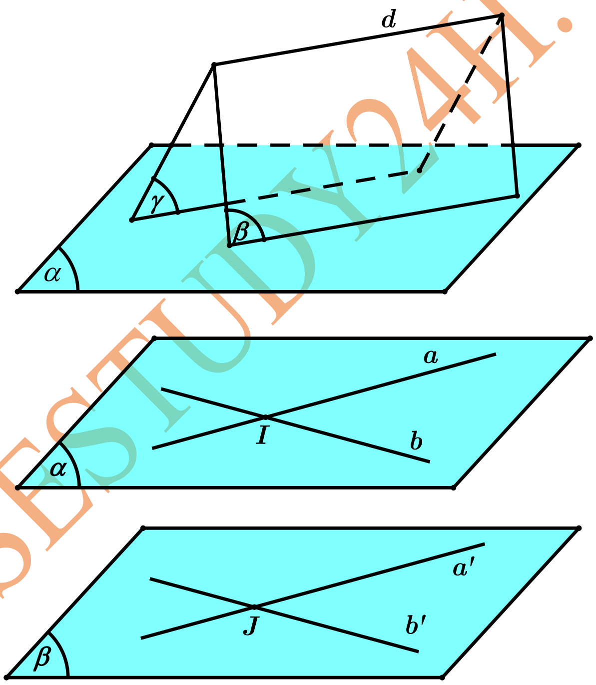
Phương pháp 2

Cơ sở của phương pháp là dùng định lý phương giao tuyến song song.

- *Bước 1: Chứng minh*

$$d=(\beta)\cap(\gamma) \text{ mà } \begin{cases}(\beta)\cap(\alpha)=a\\(\gamma)\cap(\alpha)=b\\a\,/\!/\,b\end{cases}$$

- *Bước 2: Kết luận* $d\,/\!/\,(\alpha)$.



B. Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD.

a) Chứng minh MN // (SBC) , MN // (SAD).

b) Gọi P là trung điểm cạnh SA. Chứng minh SB và SC đều song song với (MNP).

c) Gọi G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm của ΔABC và ΔSBC. Chứng minh G_1G_2 // (SAB)

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD. M, N là hai điểm trên AB, CD. Mặt phẳng (α) qua MN // SA.

a) Tìm các giao tuyến của (α) với (SAB) và (SAC).

b) Xác định thiết diện của hình chóp với (α)

c) Tìm điều kiện của MN để thiết diện là hình thang

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Trên cạnh AD lấy trung điểm M, trên cạnh BC lấy trung điểm N bất kỳ. Gọi (α) là mặt phẳng chứa đường thẳng MN và song song với CD .

a) Hãy xác định thiết diện của mặt phẳng (α) với tứ diện ABCD.

b) Xác định vị trí của N trên CD sao cho thiết diện là hình bình hành.

Bài 4. Cho hình thang ABCD có đáy lớn AB và S là một điểm ở ngoài mặt phẳng của hình thang. Gọi M là một điểm của CD; (α) là mặt phẳng qua M và song song với SA và BC.

a) Hãy tìm thiết diện của mặt phẳng (α) với hình chóp S.ABCD. Thiết diện là hình gì ?

b) Tìm giao tuyến của (α) với mặt phẳng (SAD).

Bài 5. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M là một điểm trên cạnh SC và (α) là mặt phẳng chứa AM và song song với BD.

a) Hãy nêu cách dựng các giao điểm E, F của mặt phẳng (α) lần lượt với các cạnh SB, SD.

b) Gọi I là giao điểm của ME và CB, J là giao điểm của MF và CD. Hãy chứng minh ba điểm I, J, A thẳng hàng.

Bài 6. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF không cùng nằm trong một mặt phẳng.

a) Gọi O, O′ lần lượt là tâm của ABCD và ABEF. Chứng minh OO′ song song với các mặt phẳng (ADF) và (BCE).

b) M, N là 2 điểm lần lượt trên hai cạnh AE, BD sao cho AM = $\frac{1}{3}$AE, BN = $\frac{1}{3}$BD. Chứng minh MN // (CDFE).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình bình hành. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD.

a) Chứng minh MN song song với các mặt phẳng (SBC), (SAD).

b) Gọi P là trung điểm của SA. Chứng minh SB, SC đều song song với (MNP).

c) Gọi G_1, G_2 là trọng tâm của các tam giác ABC, SBC. Chứng minh G_1G_2 // (SBC).

Bài 8. Cho tứ diện ABCD. G là trọng tâm của ΔABD. M là 1 điểm trên cạnh BC sao cho MB = 2MC. Chứng minh MG // (ACD).

HD: Chứng minh MG song song với giao tuyến của (BMG) và (ACD).

Bài 9. Cho tứ diện ABCD. Gọi O, O′ lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, ABD. Chứng minh rằng:

a) Điều kiện cần và đủ để OO′ // (BCD) là $\frac{BC}{BD} = \frac{AB+AC}{AB+AD}$

b) Điều kiện cần và đủ để OO′ song song với 2 mặt phẳng (BCD), (ACD) là BC = BD và AC = AD.

HD: Sử dụng tính chất đường phân giác trong tam giác.

Bài 10. Cho tứ diện ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, CD và G là trung điểm của đoạn MN.

a) Tìm giao điểm A′ của đường thẳng AG với (BCD).

b) Qua M kẻ đường thẳng Mx song song với AA′ và Mx cắt (BCD) tại M′. Chứng minh B, M′, A′ thẳng hàng và BM′ = M′A′ = A′N.

c) Chứng minh GA = 3GA′.

Dạng 3. Bài toán hai mặt phẳng song song

A. Lý thuyết

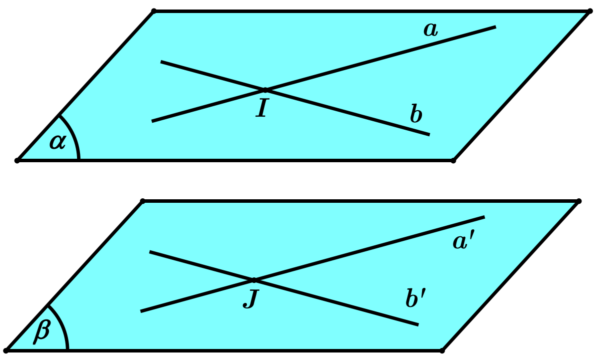
Phương pháp 1

Cơ sở của phương pháp chứng minh hai mặt phẳng (α) và (β) song song nhau là:

- *Bước 1: Chứng minh mặt phẳng (α) chứa hai đường thẳng a, b cắt nhau lần lượt song song với hai đường thẳng a', b' cắt nhau trong mặt phẳng (β).*
- *Bước 2: Kết luận $(\alpha) /\!/ (\beta)$ theo điều kiện cần và đủ.*

Phương pháp 2

- *Bước 1: Tìm hai đường thẳng a, b cắt nhau trong mặt phẳng (α).*
- *Bước 2: Lần lượt chứng minh $a /\!/ (\beta)$ và $b /\!/ (\beta)$*
- *Bước 3: Kết luận $(\alpha) /\!/ (\beta)$.*



B. Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh (OMN) // (SBC).

b) Gọi P, Q là trung điểm của AB, ON. Chứng minh PQ // (SBC).

Bài 2. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J là hai điểm di động lần lượt trên các cạnh AD, BC sao cho luôn có: $\frac{IA}{ID} = \frac{JB}{JC}$.

a) Chứng minh IJ luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.

b) Tìm tập hợp điểm M chia đoạn IJ theo tỉ số k cho trước.

c) Tập hợp điểm M là đoạn EF với E, F là các điểm chia AB, CD theo tỉ số k.

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD.

a) Chứng minh (OMN) // (SBC).

b) Gọi I là trung điểm của SD, J là một điểm trên (ABCD) và cách đều AB, CD. Chứng minh IJ song song (SAB).

c) Giả sử hai tam giác SAD, ABC đều cân tại A. Gọi AE, AF là các đường phân giác trong của các tam giác ACD và SAB. Chứng minh EF // (SAD).

Bài 4. Cho hai hình vuông ABCD và ABEF ở trong hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC và BF lần lượt lấy các điểm M, N sao cho AM = BN. Các đường thẳng song song với AB vẽ từ M, N lần lượt cắt AD, AF tại M′, N′.

a) Chứng minh: (CBE) // (ADF).

b) Chứng minh: (DEF) // (MNN′M′).

c) Gọi I là trung điểm của MN, tìm tập hợp điểm I khi M, N di động.

HD c) Trung tuyến tam giác ODE vẽ từ O.

Bài 5. Cho hai nửa đường thẳng chéo nhau Ax, By. M và N là hai điểm di động lần lượt trên Ax, By sao cho AM = BN. Vẽ $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{BA}$.

a) Chứng minh MP có phương không đổi và MN luôn song song với 1 mặt phẳng cố định.

b) Gọi I là trung điểm của MN. Chứng minh I nằm trên 1 đường thẳng cố định khi M, N di động.

Bài 6. Cho tứ diện ABCD có AB = AC = AD. Chứng minh các đường phân giác ngoài của các góc BAC, CAD, DAB đồng phẳng.

HD: Cùng nằm trong mặt phẳng qua A và song song với (BCD).

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình bình hành tâm O. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA, SD.

a) Chứng minh rằng : (OMN) // (SBC)

b) Gọi P, Q , R lần lượt là trung điểm của AB, ON, SB. Chứng minh : PQ // (SBC), (MOR) // (SCD)

Bài 8. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và không đồng phẳng. I , J , K lần lượt là trung điểm các cạnh AB, CD, EF. Chứng minh:

a) (ADF) // (BCE) b) (DIK) // (JBE)

Bài 9. Cho các hình bình hành ABCD, ABEF nằm trên hai mặt phẳng khác nhau. Trên các đường chéo AC, BF theo thứ tự lấy các điểm M, N sao cho MC = 2AM, NF = 2BN. Qua M, N lần lượt kẻ các đường thẳng song song với cạnh AB, cắt các cạnh AD, AF theo thứ tự tại M_1, N_1. Chứng minh rằng :

a) MN // DE

b) M_1N_1 // (DEF)

c) (MNM_1N_1) // (DEF)

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a. Trên AB lấy một điểm M với AM = x. Gọi (α) là mặt phẳng qua M và song song với mặt phẳng (SAD) cắt SB, SC và CD lần lượt tại N, P, Q

a) Tìm thiết diện của (α) với mặt phẳng hình chóp . Thiết diện là hình gì ?

b) Tìm quĩ tích giao điểm I của MN và PQ khi M di động trên đoạn AB.

c) Cho $\widehat{SAD} = 90^o$ và SA = a. Tính diện tích của thiết diện theo a và x. Tính x để diện tích đó bằng $\frac{3a^2}{8}$

Bài 11. Cho hai hình bình hành ABCD và ABEF có chung cạnh AB và nằm trong hai mặt phẳng phân biệt . Gọi M, N thứ tự là trung điểm của AB, BC và I , J , K theo thứ tự là trọng tâm các tam giác ADF, ADC, BCE. Chứng minh (IJK) // (CDFE).

Bài 12. Cho tứ diện ABCD. Gọi G_1, G_2, G_3 lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC, ACD, ADB.

a) Chứng minh : ($G_1G_2G_3$) // (BCD)

b) Tìm thiết diện của tứ diện ABCD với mặt phẳng ($G_1G_2G_3$). Tính diện tích thiết diện theo diện tích của tam giác BCD là S.

Bài 13. Cho hai tia chéo nhau Ax, By. Hai điểm M, N lần lượt di động trên Ax, By sao cho AM = BN. Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn luôn song song với một mặt phẳng cố định.

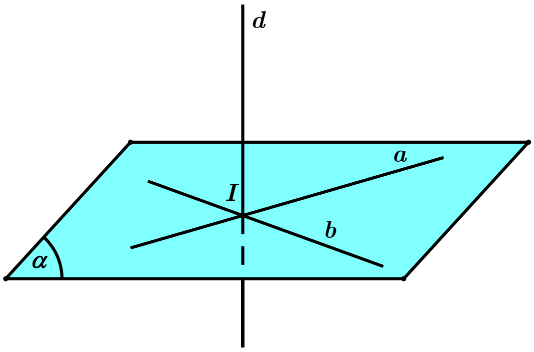
Bài 14. Cho tứ diện ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD. Một mặt phẳng qua IJ cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại N và M. Cho trước điểm M, hãy trình bày cách dựng điểm N. Xét trường hợp đặc biệt khi M là trung điểm của BC. Gọi K là giao của MN và IJ. Chứng minh rằng : KM = KN.

Dạng 4. Bài toán đường thẳng vuông góc với mặt phẳng

A. Lý thuyết

Phương pháp 1

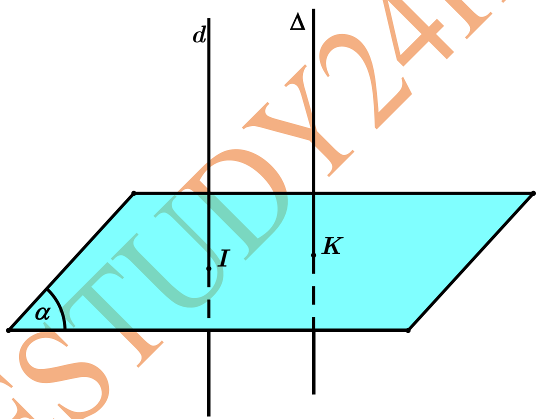
Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (α) ta chứng minh d vuông góc với hai đường thẳng a,b cắt nhau nằm trong (α).



$$\left.\begin{array}{l} d \perp a \\ d \perp b \\ a,b \subset (P) \\ a \cap b = I \end{array}\right\} \Rightarrow d \perp (P).$$

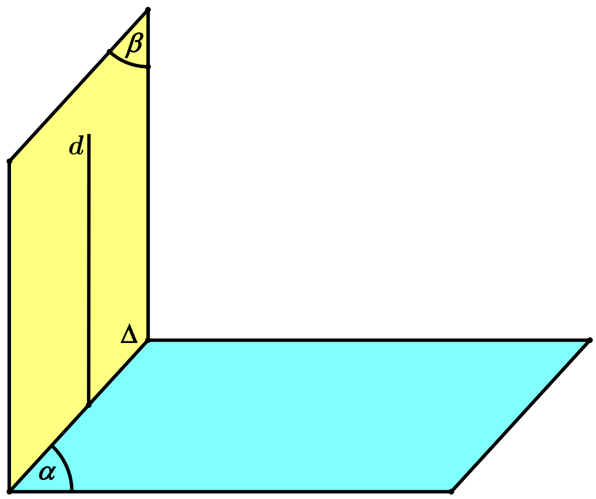
Phương pháp 2

Sử dụng tính chất: $d \,/\!/\, \Delta$ mà $\Delta \perp (\alpha)$ thì $d \perp (\alpha)$.



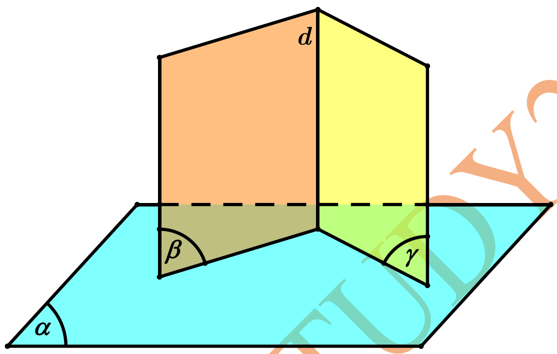
Phương pháp 3

Nếu hai mặt phẳng (α), (β) vuông góc với nhau và cắt nhau theo giao tuyến Δ, đường thẳng nào nằm trong mặt phẳng (β) mà vuông góc với giao tuyến Δ thì vuông góc với mặt phẳng (α).



Phương pháp 4

Nếu hai mặt phẳng phân biệt cùng vuông góc với mặt phẳng thứ ba thì giao tuyến của chúng vuông góc với mặt phẳng thứ ba đó.



$$\left.\begin{array}{l}(P)\perp(R)\\(Q)\perp(R)\\(P)\cap(Q)=a\end{array}\right\}\Rightarrow a\perp(R).$$

B. Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông tâm O, SA ⊥ (ABCD). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC, SD.

a) Chứng minh: BC ⊥ (SAB), CD ⊥ (SAD), BD ⊥ (SAC).

b) Chứng minh: AH, AK cùng vuông góc với SC. Từ đó, suy ra 3 đường thẳng AH, AI, AK cùng nằm trong một mặt phẳng.

c) Chứng minh : HK ⊥ (SAC). Từ đó, suy ra HK ⊥ AI.

Bài 2. Cho tứ diện S.ABC có tam giác ABC vuông tại B; SA ⊥ (ABC).

a) Chứng minh: BC ⊥ (SAB).

b) Gọi AH là đường cao của ΔSAB. Chứng minh: AH ⊥ SC.

Bài 3. Cho hình chóp SABCD, có đáy ABCD là hình thoi tâm O. Biết SA = SC, SB = SD.

a) Chứng minh: SO ⊥ (ABCD).

b) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của các cạnh BA, BC. Chứng minh IJ ⊥ (SBD).

Bài 4. Cho tứ diện ABCD có ABC và DBC là 2 tam giác đều. Gọi I là trung điểm của BC.

a) Chứng minh: BC ⊥ (AID).

b) Vẽ đường cao AH của ΔAID. Chứng minh: AH ⊥ (BCD).

Bài 5. Cho tứ diện OABC có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Gọi H là hình chiếu vuông góc của điểm O trên (ABC). Chứng minh rằng:

a) BC ⊥ (OAH).

b) H là trực tâm của tam giác ABC.

c) $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$.

d) Các góc của tam giác ABC đều nhọn.

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình vuông cạnh a. Mặt bên SAB là tam giác đều; SAD là tam giác vuông cân đỉnh S. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD.

a) Tính các cạnh của ΔSIJ và chứng minh rằng SI ⊥ (SCD), SJ ⊥ (SAB).

b) Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên IJ. Chứng minh: SH ⊥ AC.

c) Gọi M là một điểm thuộc đường thẳng CD sao cho: BM ⊥ SA. Tính AM theo a.

Bài 7. Cho hình chóp SABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và SC = $a\sqrt{2}$. Gọi H và K lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AD.

a) Chứng minh: SH ⊥ (ABCD).

b) Chứng minh: AC ⊥ SK và CK ⊥ SD.

Bài 8. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy là hình chữ nhật có AB = a, BC = $a\sqrt{3}$, mặt bên SBC vuông tại B, mặt bên SCD vuông tại D có SD = $a\sqrt{5}$.

a) Chứng minh: SA ⊥ (ABCD) và tính SA.

b) Đường thẳng qua A và vuông góc với AC, cắt các đường thẳng CB, CD lần lượt tại I, J. Gọi H là hình chiếu của A trên SC. Hãy xác định các giao điểm K, L của SB, SD với (HIJ). Chứng minh: AK ⊥ (SBC), AL ⊥ (SCD).

c) Tính diện tích tứ giác AKHL.

Bài 9. Gọi I là 1 điểm bất kì ở trong đường tròn (O;R). CD là dây cung của (O) qua I. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng chứa đường tròn (O) tại I lấy điểm S với OS = R. Gọi E là điểm đối tâm của D trên đường tròn (O). Chứng minh:

a) Tam giác SDE vuông tại S.

b) SD ⊥ CE.

c) Tam giác SCD vuông.

Bài 10. Cho ΔMAB vuông tại M ở trong mặt phẳng (P). Trên đường thẳng vuông góc với (P) tại A lấy 2 điểm C, D ở hai bên điểm A. Gọi C′ là hình chiếu của C trên MD, H là giao điểm của AM và CC′.

a) Chứng minh: CC′ ⊥ (MBD).

b) Gọi K là hình chiếu của H trên AB. Chứng minh: K là trực tâm của ΔBCD.

Bài 11. Cho hình tứ diện ABCD.

a) Chứng minh rằng: $AB \perp CD \Leftrightarrow AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$.

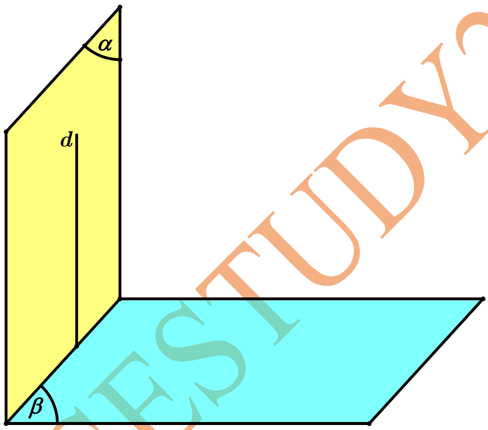
b) Từ đó, suy ra nếu một tứ diện có 2 cặp cạnh đối vuông góc với nhau thì cặp cạnh đối còn lại cũng vuông góc với nhau.

Dạng 5. Bài toán hai mặt phẳng vuông góc

A. Lý thuyết

Phương pháp 1

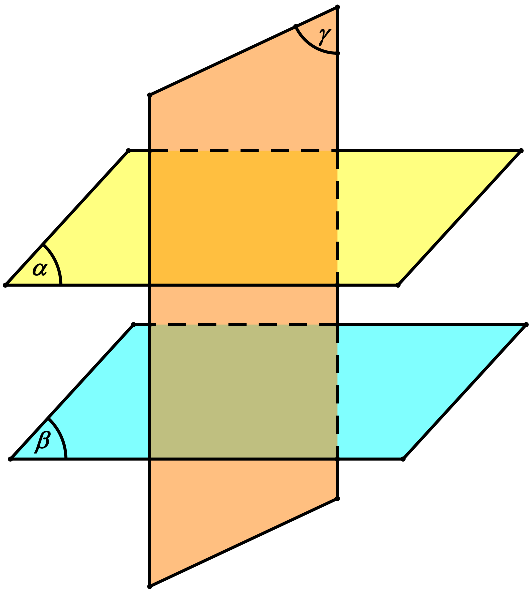
Muốn chứng minh hai mặt phẳng vuông góc với nhau ta chứng minh mặt phẳng này chứa một đường thẳng vuông góc mặt phẳng kia.



$$\left.\begin{array}{l} d \perp (\beta) \\ d \subset (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (\alpha) \perp (\beta)$$

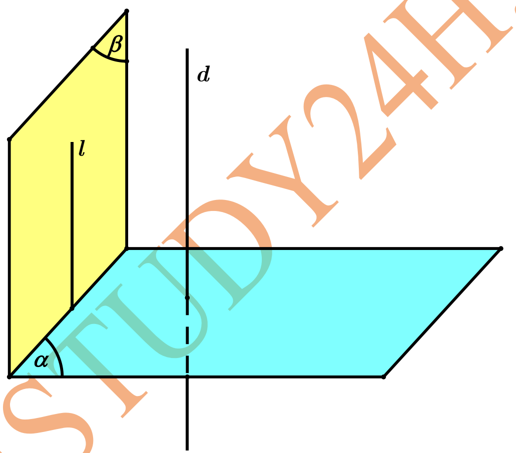
Phương pháp 2

Sử dụng tính chất: $\left.\begin{array}{l} (\alpha) \,//\, (\beta) \\ (\gamma) \perp (\alpha) \end{array}\right\} \Rightarrow (\gamma) \perp (\beta)$.



Phương pháp 3

Sử dụng tính chất $(\alpha) \perp d$, mà $d \,//\, (\beta)$ hoặc $d \subset (\beta)$ thì $(\alpha) \perp (\beta)$.



B. Bài tập

Bài 1. Cho tam giác đều ABC, cạnh a. Gọi D là điểm đối xứng với A qua BC. Trên đường thẳng vuông góc với (ABC) tại D lấy điểm S sao cho SD = $a\sqrt{6}$. Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) vuông góc với nhau.

Bài 2. Cho hình tứ diện ABCD có hai mặt (ABC) và (ABD) cùng vuông góc với đáy (DBC). Vẽ các đường cao BE, DF của ΔBCD, đường cao DK của ΔACD.

a) Chứng minh: AB ⊥ (BCD).

b) Chứng minh 2 mặt phẳng (ABE) và (DFK) cùng vuông góc với (ADC).

c) Gọi O và H lần lượt là trực tâm của 2 tam giác BCD và ADC. Chứng minh: OH ⊥ (ADC).

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông, SA ⊥ (ABCD).

a) Chứng minh (SAC) ⊥ (SBD).
b) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và (SCD).
c) Gọi BE, DF là hai đường cao của ΔSBD. Chứng minh : (ACF) ⊥ (SBC), (AEF) ⊥ (SAC).

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD). Gọi M, N là 2 điểm lần lượt ở trên hai cạnh BC, DC sao cho BM = $\frac{a}{2}$, DN = $\frac{3a}{4}$. Chứng minh 2 mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

Bài 5. Cho tam giác ABC vuông tại A. Vẽ BB′ và CC′ cùng vuông góc với (ABC).
a) Chứng minh (ABB′) ⊥ (ACC′).
b) Gọi AH, AK là các đường cao của ΔABC và ΔAB′C′. Chứng minh 2 mặt phẳng (BCC′B′) và (AB′C′) cùng vuông góc với mặt phẳng (AHK).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, mặt bên SAB là tam giác đều và vuông góc với đáy. Gọi I là trung điểm của AB.
a) Chứng minh rằng SI ⊥ (ABCD), AD ⊥ (SAB).
b) Tính góc giữa BD và (SAD).
c) Tính góc giữa SD và (SCI).

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A có AB = c, AC = b. Gọi (P) là mặt phẳng qua BC và vuông góc với (ABC); S là 1 điểm di động trên (P) sao cho S.ABC là hình chóp có 2 mặt bên SAB, SAC hợp với đáy ABC hai góc có số đo lần lượt là α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$. Gọi H, I, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của S trên BC, AB, AC.
a) Chứng minh rằng: SH^2 = HI.HJ.
b) Tìm giá trị lớn nhất của SH và khi đó hãy tìm giá trị của α.

Bài 8. Cho hình tứ diện ABCD có AB = BC = a, AC = b, DB = DC = x, AD = y. Tìm hệ thức liên hệ giữa a, b, x, y để:
a) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (BCD).
b) Mặt phẳng (ABC) ⊥ (ACD).

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD); M và N là hai điểm nằm trên các cạnh BC, CD. Đặt BM = x, DN = y.
a) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau là MN ⊥ (SAM). Từ đó, suy ra hệ thức liên hệ giữa x và y.
b) Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) có số đo bằng 30^0 là $a(x + y) + \sqrt{3}xy = a^2\sqrt{3}$.

Bài 10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I cạnh a và có góc A bằng 60^0, cạnh SC = $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ và SC $\perp$ (ABCD).

a) Chứng minh (SBD) $\perp$ (SAC).

b) Trong tam giác SCA kẻ IK $\perp$ SA tại K. Tính độ dài IK.

c) Chứng minh $BKD = 90^0$ và từ đó suy ra (SAB) $\perp$ (SAD).

Dạng 6. Bài toán về góc giữa đường thăng, mặt phẳng

A. Lý thuyết

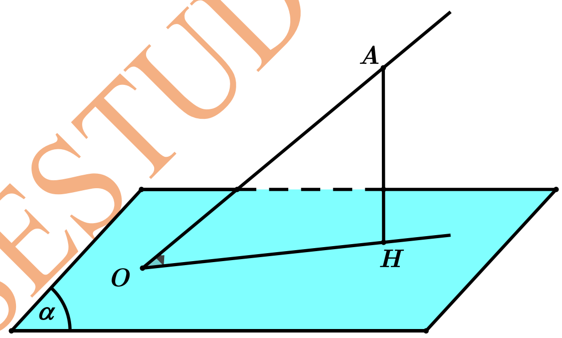
1. Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

Để xác định góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (α) ta thực hiện như sau:

Bước 1: Xác định hình chiếu vuông góc của d xuống mặt phẳng (α) là d'.

- Tìm giao điểm $O = d \cap (\alpha)$.
- Dựng hình chiếu vuông góc của A xuống (α) là H (chọn đường thẳng đi qua A và vuông góc với (α)).

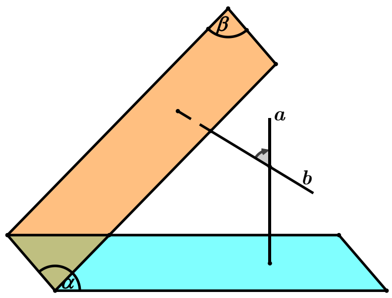
Bước 2: Góc giữa đường thẳng d và d' là góc đường thẳng d và mặt phẳng (α). Tính số đo của góc đó bằng hệ thức lượng trong tam giác vuông.



2. Góc giữa hai mặt phẳng

Phương pháp 1

Tìm hai đường thẳng a, b lần lượt vuông góc với hai mặt phẳng (α) và (β). Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



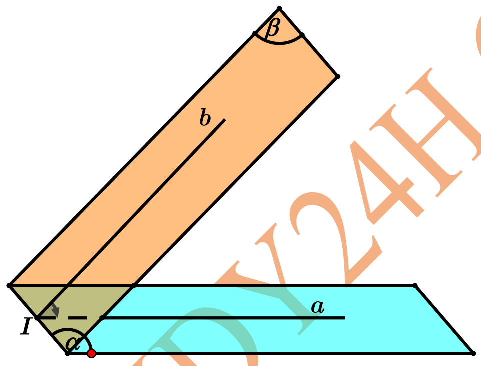
$$\left.\begin{array}{l} a\perp(\alpha)\\ b\perp(\beta)\end{array}\right\}\Rightarrow (a,b)=\ (\alpha),(\beta)\ .$$

Phương pháp 2

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Lấy điểm I ∈ Δ. Trong (α) dựng $a\perp\Delta$ tại I. Trong (β) dựng $b\perp\Delta$ tại I.

Khi đó góc giữa hai đường thẳng a,b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



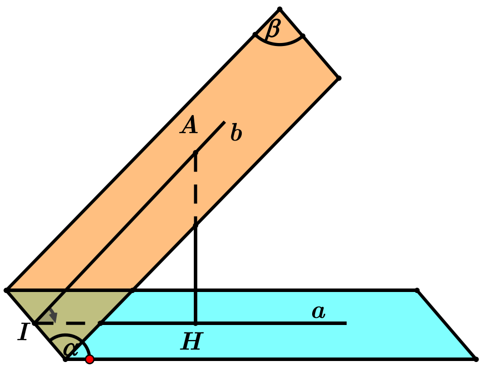
Phương pháp 3

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Trong (β) lấy điểm A. Dựng hình chiếu H của A xuống mặt phẳng (α).

Từ H dựng $HI\perp\Delta$.

Khi đó góc AHI là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



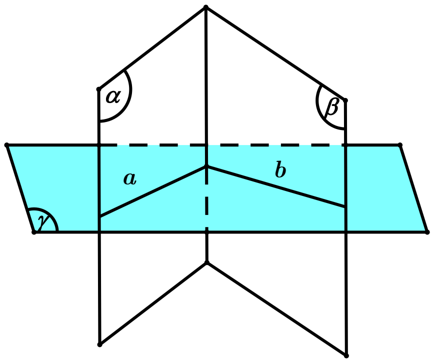
Phương pháp 4

Xác định giao tuyến Δ của (α) và (β).

Chọn mặt phẳng $(\gamma) \perp \Delta$.

Tìm các giao tuyến $a = (\gamma) \cap (\alpha)$, $b = (\gamma) \cap (\beta)$.

Khi đó, góc giữa hai đường thẳng a, b chính là góc giữa hai mặt phẳng (α) và (β).



B. Bài tập

Bài 1. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, tâm O; SO ⊥ (ABCD). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh SA và BC. Biết $(MN,(ABCD)) = 60^o$.

a) Tính MN và SO.

b) Tính góc giữa MN và (SBD).

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình vuông cạnh a; SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{6}$. Tính góc giữa:

a) SC và (ABCD) b) SC và (SAB) c) SB và (SAC) d) AC và (SBC)

Bài 3. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là hình chữ nhật; SA ⊥ (ABCD). Cạnh SC = a hợp với đáy góc α và hợp với mặt bên SAB góc β.

a) Tính SA.

b) Chứng minh: AB = $a\sqrt{\cos(\alpha+\beta).\cos(\alpha-\beta)}$.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABC, có ABC là tam giác cân, AB = AC = a, $\widehat{BAC} = \alpha$. Biết SA, SB, SC đều hợp với mặt phẳng (ABC) góc α.

a) Chứng minh hình chiếu của S trên (ABC) là tâm của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

b) Tính khoảng cách từ S đến (ABC).

Bài 5. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′, có đáy là tam giác đều cạnh a, AA′ ⊥ (ABC). Đường chéo BC′ của mặt bên BCC′B′ hợp với (ABB′A′) góc 30^0.

a) Tính AA′.

b) Tính khoảng cách từ trung điểm M của AC đến (BA′C′).

c) Gọi N là trung điểm của cạnh BB′. Tính góc giữa MN và (BA′C′).

Bài 6. Cho lăng trụ ABC.A′B′C′, có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A; AA′ ⊥ (ABC). Đoạn nối trung điểm M của AB và trung điểm N của B′C′ có độ dài bằng a, MN hợp với đáy góc α và mặt bên BCC′B′ góc β.

a) Tính các cạnh đáy và cạnh bên của lăng trụ theo a và α.

b) Chứng minh rằng: $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\beta$.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABC, có đáy ABC là tam giác vuông cân với BA = BC = a; SA ⊥ (ABC) và SA = a. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và AC.

a) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SEF) và (SBC).

Bài 8. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O; SA ⊥ (ABCD). Tính SA theo a để số đo của góc giữa hai mặt phẳng (SCB) và (SCD) bằng 60^0.

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD, có đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp đường tròn đường kính AB = 2a; SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$.

a) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SAD) và (SBC).

b) Tính góc giữa 2 mặt phẳng (SBC) và (SCD).

Bài 10. Cho hình vuông ABCD cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{3}$. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng sau:

a) (SBC) và (ABC) b) (SBD) và (ABD) c) (SAB) và (SCD)

Bài 11. Cho hình thoi ABCD cạnh a, tâm O, OB = $\frac{a\sqrt{3}}{3}$; SA ⊥ (ABCD) và SO = $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

a) Chứng minh ASC vuông.

b) Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) vuông góc.

c) Tính góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC).

Bài 12. Cho hình chóp S.ABCD có SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{2}$, đáy ABCD là hình thang vuông tại A và D với AB = 2a, AD = DC = a. Tính góc giữa các cặp mặt phẳng:

a) (SBC) và (ABC) b) (SAB) và (SBC) c) (SBC) và (SCD)

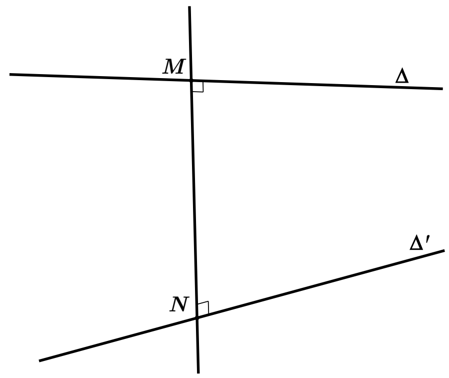
Dạng 7. Bài toán về khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau

A. Lý thuyết

Đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ' là đường thẳng a

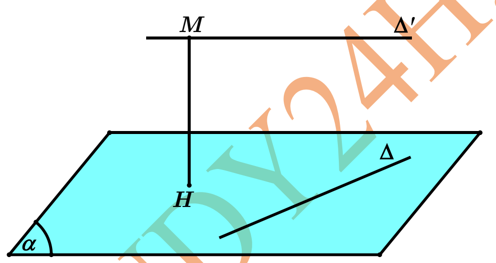
cắt Δ ở M và cắt Δ' ở N đồng thời vuông góc với cả Δ và Δ'.

Đoạn MN được gọi là đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau Δ và Δ'.



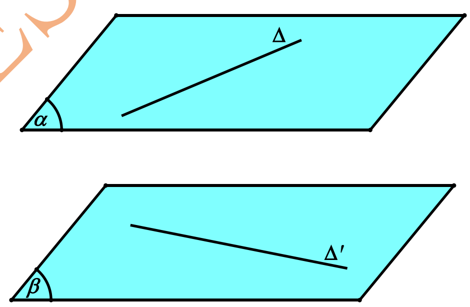
Phương pháp 1

Chọn mặt phẳng (α) chứa đường thẳng Δ và song song với Δ'. Khi đó $d(\Delta,\Delta') = d(\Delta',(\alpha))$.



Phương pháp 2

Dựng hai mặt phẳng song song và lần lượt chứa hai đường thẳng. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng đó là khoảng cách cần tìm.



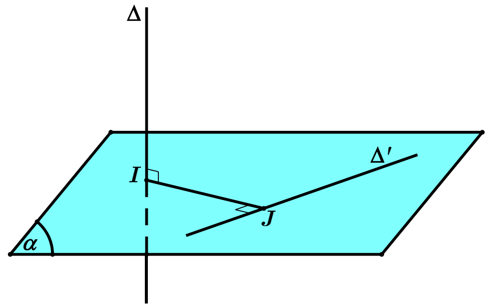
Phương pháp 3 Dựng đoạn vuông góc chung và tính độ dài đoạn đó.

Trường hợp 1: Δ và Δ' vừa chéo nhau vừa vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và vuông góc với Δ tại I.

Bước 2: Trong mặt phẳng (α) kẻ $IJ \perp \Delta'$.

Khi đó, IJ là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta,\Delta') = IJ$.



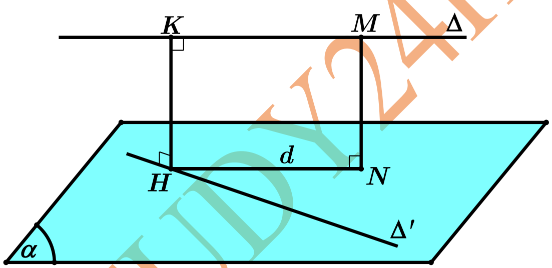
Trường hợp 2: Δ và Δ' chéo nhau mà không vuông góc với nhau

Bước 1: Chọn mặt phẳng (α) chứa Δ' và song song với Δ.

Bước 2: Dựng d là hình chiếu vuông góc của Δ xuống (α) bằng cách lấy điểm $M \in \Delta$ dựng đoạn $MN \perp \alpha$, lúc đó d là đường thẳng đi qua N và song song với Δ.

Bước 3: Gọi $H = d \cap \Delta'$, dựng $HK \,//\, MN$

Khi đó, HK là đoạn vuông góc chung và $d(\Delta, \Delta') = HK = MN$.



B. Bài tập

Bài 1. Cho hình tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC = a. Gọi I là trung điểm của BC. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) OA và BC. b) AI và OC.

Bài 2. Cho hình chóp S.ABCD, đáy ABCD là hình vuông tâm O, cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng:

a) SC và BD. b) AC và SD.

Bài 3. Cho tứ diện S.ABC có SA ⊥ (ABC). Gọi H, K lần lượt là trực tâm của các tam giác ABC và SBC.

a) Chứng minh ba đường thẳng AH, SK, BC đồng qui.

b) Chứng minh SC ⊥ (BHK), HK ⊥ (SBC).

c) Xác định đường vuông góc chung của BC và SA.

Bài 4. Cho tứ diện ABCD. Chứng minh rằng nếu AC = BD, AD = BC thì đường vuông góc chung của AB và CD là đường nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và

CD . Chứng minh rằng nếu đường thẳng nối các trung điểm I, K của hai cạnh AB và CD của tứ diện ABCD là đường vuông góc chung của AB và CD thì AC = BD, AD = BC.

Bài 5. Cho hình vuông ABCD cạnh bằng a, I là trung điểm của AB. Dựng IS ⊥ (ABCD) và IS = $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, SD, SB. Hãy dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của các cặp đường thẳng:

a) NP và AC

b) MN và AP.

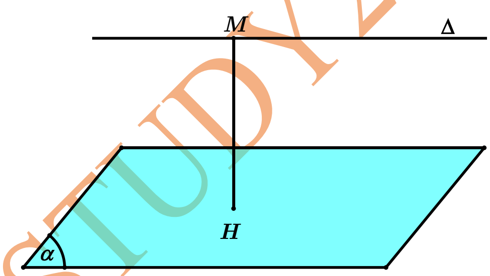
Dạng 8. Bài toán về khoảng cách giữa điểm với đường thẳng; điểm với mặt phẳng và đường thẳng với mặt phẳng

A. Lý thuyết

1. Khoảng cách giữa đường thẳng và mặt phẳng

Khoảng cách giữa đường thẳng Δ và (α):

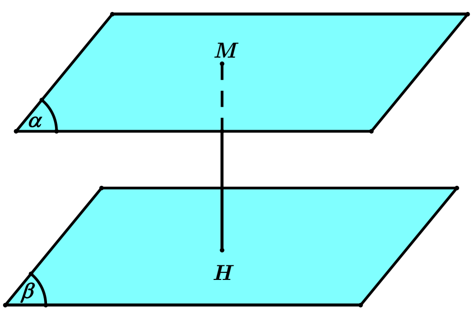
- Nếu Δ cắt (α) hoặc Δ nằm trong (α) thì $d(\Delta,(\alpha)) = 0$.
- Nếu $\Delta // (\alpha)$ thì $d(\Delta,(\alpha)) = d(M,(\alpha))$.



2. Khoảng cách giữa hai mặt phẳng

Khoảng cách giữa hai mặt phẳng (α) và (β)

- Nếu (α) cắt (β) hoặc $(\alpha) \equiv (\beta)$ thì $d((\alpha),(\beta)) = 0$.
- Nếu $(\alpha) // (\beta)$ thì $d((\alpha),(\beta)) = d(M,(\beta))$.



B. Bài tập

Bài 1. Cho tứ diện ABCD có AC = BC = AD = BD = a, AB = c, CD = c’. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và CD.

Bài 2. Cho hình lăng trụ ABC.A’B’C’ có tất cả các cạnh đều bằng *a*. Góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy bằng 30^0. Hình chiếu *H* của điểm *A* trên mặt phẳng (A’B’C’) thuộc đường thẳng B’C’.

a) Tính khoảng cách giữa hai mặt phẳng đáy.

b) Chứng minh rằng hai đường thẳng AA’ và B’C’ vuông góc, tính khoảng cách giữa chúng.

Bài 3. Cho hình lập phương ABCD.A’B’C’D’ có cạnh bằng a. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BC’ và CD’.

Bài 4. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A’B’C’D’ có AB = AA’ = a, AC’ = 2a.

a) Tính khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (ACD’).

b) Tìm đường vuông góc chung của các đường thẳng AC’ và CD’. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng ấy.

Bài 5. Cho hình hộp thoi ABCD.A’B’C’D’ có các cạnh đều bằng a và $\widehat{BAD} = \widehat{BAA'} = \widehat{DAA'} = 60^0$. Tính khoảng cách giữa hai mặt đáy (ABCD) và (A’B’C’D’).

Bài 6. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật và AB = 2a, BC = a. Các cạnh bên của hình chóp bằng nhau và bằng $a\sqrt{2}$.

a) Tính khoảng cách từ *S* đến mặt phẳng đáy (*ABCD*).

b) Gọi E và F lần lượt là trung điểm của các cạnh AB và CD; K là điểm bất kì thuộc đường thẳng AD. Chứng minh rằng khoảng cách giữa hai đường thẳng EF và SK không phụ thuộc vào K, hãy tính khoảng cách đó theo a.

Bài 7. Cho hình chóp S.ABCD, có SA ⊥ (ABCD) và SA = $a\sqrt{6}$, đáy ABCD là nửa lục giác đều nội tiếp trong đường tròn đường kính AD = 2a.

a) Tính các khoảng cách từ A và B đến mặt phẳng (SCD).

b) Tính khoảng cách từ đường thẳng AD đến mặt phẳng (SBC).

c) Tính diện tích của thiết diện của hình chóp S.ABCD với mặt phẳng (P) song song với (SAD) và cách (SAD) một khoảng bằng $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Bài 8. Cho hình lăng trụ ABC.A′B′C′ có AA′ ⊥ (ABC) và AA′ = a, đáy ABC là tam giác vuông tại A có BC = 2a, AB = $a\sqrt{3}$.

a) Tính khoảng cách từ AA′ đến mặt phẳng (BCC′B′).

b) Tính khoảng cách từ A đến (A′BC).

c) Chứng minh rằng AB ⊥ (ACC′A′) và tính khoảng cách từ A′ đến mặt phẳng (ABC′).

Bài 9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA ⊥ (ABCD) và SA = 2a.

a) Tính khoảng cách từ A đến (SBC), từ C đến (SBD).

b) M, N lần lượt là trung điểm của AB và AD. Chứng minh rằng MN song song với (SBD) và tính khoảng cách từ MN đến (SBD).

c) Mặt phẳng (P) qua BC cắt các cạnh SA, SD theo thứ tự tại E, F. Cho biết AD cách (P) một khoảng là $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, tính khoảng cách từ S đến mặt phẳng (P) và diện tích tứ giác BCFE.

Bài 10. Cho hai tia chéo nhau Ax, By hợp với nhau góc 60^0, nhận AB = a làm đoạn vuông góc chung. Trên By lấy điểm C với BC = a. Gọi D là hình chiếu của C trên Ax.

a) Tính AD và khoảng cách từ C đến (ABD).

b) Tính khoảng cách giữa AC và BD.

Bài 11. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và $BAD = 60^0$. Gọi O là giao điểm của AC và BD. Đường thẳng SO ⊥ (ABCD) và SO = $\frac{3a}{4}$. Gọi E là trung điểm của BC, F là trung điểm của BE.

a) Chứng minh (SOF) ⊥ (SBC).

b) Tính các khoảng cách từ O và A đến (SBC).

CHUYÊN ĐỀ 3. VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN, QUAN HỆ VUÔNG GÓC

A. Lý thuyết

1. Các quy tắc cộng vectơ

- **Qui tắc ba điểm:** Cho ba điểm A, B, C bất kỳ, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$
- **Qui tắc hình bình hành:** Cho hình bình hành ABCD, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$
- **Qui tắc hình hộp:** Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′, ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$
- **Hê thức trung điểm đoạn thẳng:** Cho I là trung điểm của đoạn thẳng AB, O tuỳ ý. $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$
- **Hệ thức trọng tâm tam giác:** Cho G là trọng tâm của tam giác ABC, O tuỳ ý. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{OG}$

- **Hệ thức trọng tâm tứ diện:** Cho G là trọng tâm của tứ diện ABCD, O tuỳ ý.

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}; \qquad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=4\overrightarrow{OG}$$

2. Sự đồng phẳng của ba vectơ

- Ba vectơ được gọi là đồng phẳng nếu các giá của chúng cùng song song với một mặt phẳng.
- **Điều kiện để ba vectơ đồng phẳng:** Cho ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, trong đó $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó: $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng ⇔ ∃! m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$

3. Tích vô hướng của hai vectơ

- **Góc giữa hai vectơ trong không gian:**

$$\overrightarrow{AB}=\vec{u},\overrightarrow{AC}=\vec{v}\Rightarrow(\vec{u},\vec{v})=BAC\ (0^0\le BAC\le 180^0)$$

- **Tích vô hướng của hai vectơ trong không gian:**

  Cho $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$. Khi đó: $\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})$

  Với $\vec{u}=\vec{0}$ *hoặc* $\vec{v}=\vec{0}$. Qui ước: $\vec{u}.\vec{v}=0$

  $\vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow\vec{u}.\vec{v}=0$

4. Phân tích vectơ

Để chứng minh ba vectơ đồng phẳng, có thể chứng minh bằng một trong các cách:

- Chứng minh các giá của ba vectơ cùng song song với một mặt phẳng.
- Dựa vào điều kiện để ba vectơ đồng phẳng: Nếu có m, n ∈ R: $\vec{c}=m\vec{a}+n\vec{b}$ thì $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng.

Để phân tích một vectơ $\vec{x}$ theo ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng, tìm các số m, n, p sao cho: $\vec{x}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$.

B. Bài tập

Dạng 1. Chứng minh đẳng thức vectơ

Bài 1. Cho tứ diện ABCD. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB và CD, I là trung điểm của EF.

a) Chứng minh: $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}=\vec{0}$.

b) Chứng minh: $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=4\overrightarrow{MI}$, với M tuỳ ý.

c) Tìm điểm M thuộc mặt phẳng cố định (P) sao cho: $|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}|$ nhỏ nhất.

Bài 2. Chứng minh rằng trong một tứ diện bất kì, các đoạn thẳng nối trung điểm của các cạnh đối đồng qui tại trung điểm của chúng. (*Điểm đồng qui đó được gọi là trọng tâm của tứ diện).*

Bài 3. Cho tứ diện ABCD. Gọi A′, B′, C′, D′ lần lượt là các điểm chia các cạnh AB, BC, CD, DA theo tỉ số k (k ≠ 1). Chứng minh rằng hai tứ diện ABCD và A′B′C′D′ có cùng trọng tâm.

Bài 4. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình bình hành tâm O. Chứng minh rằng:

a) $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SD}$.

b) Tính tổng: $\overrightarrow{SA}+\overrightarrow{SB}+\overrightarrow{SC}+\overrightarrow{SD}$

Bài 5. Cho hình hộp ABCD. A'B'C'D'. Gọi P, R lần lượt là trung điểm các cạnh AB và A'D'; gọi P' ; Q; Q' ; R' lần lượt là giao điểm của các đường chéo của các mặt ABCD; CDD'C', A'B'C'D', ADD'A'.

a) Chứng minh rằng: $\overrightarrow{PP'}+\overrightarrow{QQ'}+\overrightarrow{RR'}=\vec{0}$

b) Hai tam giác PQR và P'Q'R' có cùng trọng tâm.

Dạng 2. Chứng minh ba vectơ đồng phẳng
Biểu diễn một vectơ theo những vectơ khác

Bài 1. Cho tam giác ABC. Lấy điểm S nằm ngoài mặt phẳng (ABC). Trên đoạn SA lấy điểm M sao cho $\overrightarrow{MS}=-2\overrightarrow{MA}$ và trên đoạn BC lấy điểm N sao cho $\overrightarrow{NB}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NC}$.
Chứng minh rằng ba vectơ $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{MN},\overrightarrow{SC}$ đồng phẳng.

HD: Chứng minh $\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{SC}$.

Bài 2. Cho hình hộp ABCD.EFGH. Gọi M, N, I, J, K, L lần lượt là trung điểm của các cạnh AE, CG, AD, DH, GH, FG; P và Q lần lượt là trung điểm của NG và JH.

a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{FH},\overrightarrow{PQ}$ đồng phẳng.

b) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{IL},\overrightarrow{JK},\overrightarrow{AH}$ đồng phẳng.

Bài 3. Cho hình lăng trụ ABC.DEF. Gọi G, H, I, J, K lần lượt là trung điểm của AE, EC, CD, BC, BE.

a) Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{AJ},\overrightarrow{GI},\overrightarrow{HK}$ đồng phẳng.

b) Gọi M, N lần lượt là hai điểm trên AF và CE sao cho $\frac{FM}{FA}=\frac{CN}{CE}=\frac{1}{3}$. Các đường thẳng vẽ từ M và N song song với CF lần lượt cắt DF và EF tại P và Q. Chứng minh ba vectơ $\overrightarrow{MN},\overrightarrow{PQ},\overrightarrow{CF}$ đồng phẳng.

Bài 4. Cho hình hộp ABCD.A′B′C′D′. Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và DD′; G và G′ lần lượt là trọng tâm của các tứ diện A′D′MN và BCC′D′. Chứng minh rằng đường thẳng GG′ và mặt phẳng (ABB′A′) song song với nhau.

Bài 5. Cho tứ diện OABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{OG}$ theo các ba $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

b) Gọi D là trọng tâm của tứ diện OABC. Phân tích vectơ $\overrightarrow{OD}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$.

Bài 6. Cho hình hộp OABC.DEFG. Gọi I là tâm của hình hộp.

a) Phân tích hai vectơ $\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{BI}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{FI}$.

Bài 7. Cho hình lập phương ABCD.EFGH.

a) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AE}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.

b) Phân tích vectơ $\overrightarrow{AG}$ theo ba vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}$.