

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

I. Lý thuyết

Nếu m con chim bồ câu được đặt vào n chuồng chim bồ câu và $m > n$, thì (ít nhất) một chuồng chim bồ câu sẽ bao hàm ít nhất $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ con chim bồ câu nếu m là bội của n , và ít nhất $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil + 1$ con chim bồ câu nếu m không phải là bội của n .

Tổng quát: Nếu m vật thể được đặt vào n hộp chứa thì:

- Nếu m chia hết cho n thì tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ đồ vật.
- Nếu m không chia hết cho n thì tồn tại ít nhất một hộp chứa không ít hơn $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil + 1$ đồ vật.

II. Bài tập

Bài 1: Một trường học có 1000 học sinh gồm 23 lớp. Chứng minh rằng phải có ít nhất một lớp có từ 44 học sinh trở lên.

Bài 2: Một lớp có 50 học sinh. Chứng minh rằng có ít nhất 5 học sinh có tháng sinh giống nhau.

Bài 3: Có năm loại học bổng khác nhau. Hỏi rằng phải có ít nhất bao nhiêu sinh viên để chắc chắn rằng có ít nhất là 6 người cùng nhận học bổng như nhau.

Bài 4: Trong 45 học sinh làm bài kiểm tra, không có ai bị điểm dưới 2, chỉ có 2 học sinh được điểm 10. Chứng minh rằng ít nhất cũng tìm được 6 học sinh có điểm kiểm tra bằng nhau (điểm kiểm tra là một số tự nhiên).

Bài 5: Một lớp học có 50 học sinh, có duy nhất một học sinh thiếu nhiều bài tập nhất là thiếu 3 bài tập. Chứng minh rằng tồn tại 17 học sinh thiếu một số bài tập như nhau (trường hợp không thiếu bài tập coi như thiếu 0 bài).

Bài 6: Trong một phòng họp có n người, bao giờ cũng tìm được 2 người có số người quen trong số những người dự họp là như nhau.

Bài 7: Trong một lưới ô vuông kích thước 5×5 , người ta điền ngẫu nhiên vào các ô một trong các giá trị $-1, 0$ hoặc 1 . Sau đó, tính tổng tất cả các ô theo hàng; theo cột và theo hai đường chéo. Chứng minh rằng tồn tại ít nhất hai tổng có giá trị bằng nhau.

Bài 8: Giả sử trong một nhóm 6 người mỗi cặp hai hoặc là bạn hoặc là thù. Chứng tỏ rằng trong nhóm có ba người là bạn lẫn nhau hoặc có ba người là kẻ thù lẫn nhau.

Bài 9: Có 5 đấu thủ thi đấu cờ, mỗi người đấu một trận với mỗi đấu thủ khác. Chứng minh rằng trong suốt thời gian thi đấu, luôn tồn tại hai đấu thủ có số trận đã đấu bằng nhau.

Bài 10: Chia 50 cái kẹo cho 10 em bé (em nào cũng được chia kẹo). Chứng minh rằng dù chia cách nào đi nữa cũng tồn tại hai em có số kẹo bằng nhau.

Bài 11: Bốn lớp 11A,11B,11C,11D có tất cả 44 học sinh giỏi, trong đó số học sinh giỏi của lớp 11D không quá 10 người. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba lớp 11A,11B,11C có số học sinh giỏi từ 12 em trở lên.

Bài 12: Có 33 con chim đậu trên một sân vuông hình vuông cạnh 4m. Chứng minh rằng có ít nhất 3 con đậu trong một đường tròn có bán kính 1m.

Bài 13: Một cuộc họp gồm 12 người tham dự để bàn về 3 vấn đề. Có 8 người phát biểu về vấn đề A, 5 người phát biểu về vấn đề B và 7 người phát biểu về vấn đề C. Ngoài ra, có đúng 1 người không phát biểu vấn đề nào.

Hỏi nhiều nhất là có bao nhiêu người phát biểu cả 3 vấn đề.

Bài 14: Có 17 nhà bác học viết thư cho nhau trao đổi 3 vấn đề. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 người cùng trao đổi một vấn đề.