ĐỊNH LÝ TALÉT VÀ HỆ QUẢ CƠ BẢN

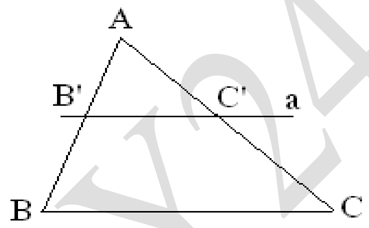
1. Nội dung kiến thức

a) Định lý Talét trong tam giác

Định lý thuận: *Nếu một đường thẳng song song với một cạnh của tam giác và cắt hai cạnh còn lại thì nó định ra trên hai cạnh đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ.*

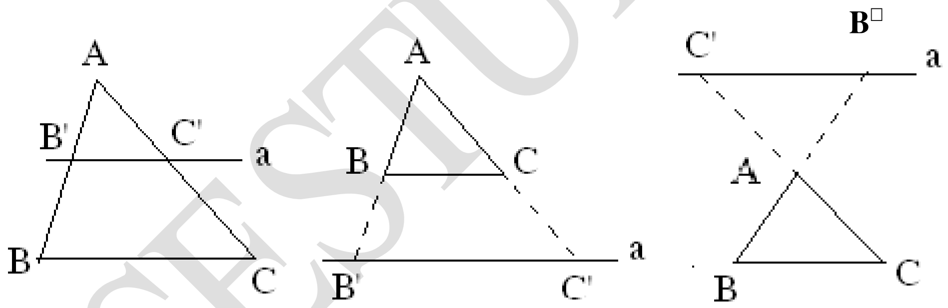
Định lý đảo: *Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và định ra trên hai cạnh này những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì đường thẳng đó song song với cạnh còn lại của tam giác.*

$$\begin{cases} \triangle\ ABC \\ a \,//\, BC \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{AB'}{AB}=\dfrac{AC'}{AC} \\ \dfrac{AB'}{BB'}=\dfrac{AC'}{CC'} \\ \dfrac{BB'}{AB}=\dfrac{CC'}{AC} \end{array}\right.$$



b) Hệ quả của định lý Talét

Nếu một đường thẳng cắt hai cạnh của một tam giác và song song với cạnh còn lại thì nó tạo thành một tam giác mới có ba cạnh tương ứng tỉ lệ với ba cạnh của tam giác đã cho.

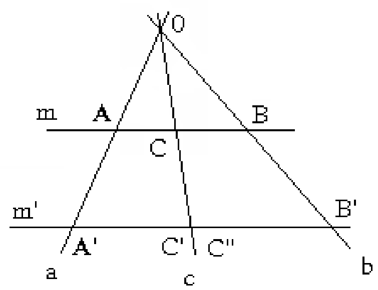


2. Bài tập vận dụng

<u>Bài 1</u>: Cho ba tia Ox, Oy, Oz cắt hai đường thẳng song song m, m' lần lượt tại: A, A' $\in$ Ox ; B, B' $\in$ Oy ; C, C' $\in$ Oz . Chứng minh rằng: $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{BC}{B'C'}$

<u>Bài 2</u>: Cho ba đường thẳng a, b, c cắt hai đường thẳng song song m, m' lần lượt tại A, A' $\in$ a ; B, B' $\in$ b ; C, C' $\in$ c sao cho $\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'}=k(k\neq 1)$. Chứng minh rằng các đường thẳng a, b, c đồng quy tại một điểm.

<u>Giải</u>



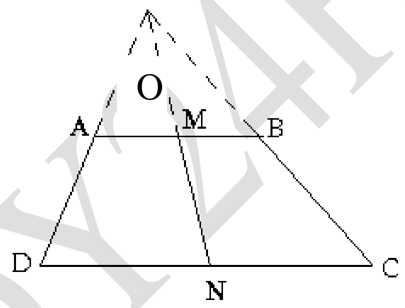
Giả sử hai đường thẳng a, b cắt nhau tại O, ta cần chứng minh đường thẳng c đi qua O. Gọi giao điểm của đường thẳng OC với m' là C". Khi đó, theo định lý thuận, ta có:

$\frac{AC}{AC''} = \frac{BC}{B'C'}$. Mặt khác, $\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$

Từ đó suy ra A'C" = A'C' và B'C' = B'C" $\Rightarrow C' \equiv C''$. Vậy c đi qua O hay a, b, c đồng quy tại O.

➔ Phát biểu khái quát bài toán: "*Nếu ba đường thẳng cắt hai đường thẳng song song và định ra trên hai đường thẳng đó những đoạn thẳng tương ứng tỷ lệ thì ba đường thẳng đó đồng quy*".

<u>Bài 3</u>: Chứng minh rằng hai đường thẳng chứa hai cạnh bên và đường thẳng nối trung điểm của hai đáy của một hình thang đồng quy.



<u>Giải:</u>

Vì M là trung điểm của AB nên: MA = MB

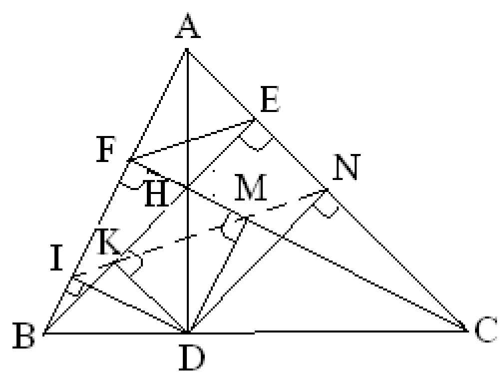
Vì N là trung điểm của CD nên: NC = ND

từ đó suy ra: $\frac{AM}{DN} = \frac{MB}{NC}$

➔ Phát biểu khái quát: "*Nếu ba đường thẳng đồng quy cắt hai đường thẳng song song, tạo ra trên đường thẳng thứ nhất hai đoạn thẳng bằng nhau thì cũng tạo ra trên đường thẳng thứ hai hai đoạn thẳng bằng nhau*".

<u>Bài 4</u>: Cho tam giác nhọn ABC, các đường cao AD,BE,CF. Gọi I, K, M, N theo thứ tự là chân các đường vuông góc kẻ từ D đến BA, BE, CF, CA. Chứng minh rằng bốn điểm I, K, M, N thẳng hàng.

<u>Giải:</u>



Gọi H là giao điểm của AD, BE, CF

ta có $\frac{BI}{IF} = \frac{BD}{DC} = \frac{BK}{KE} \Rightarrow IK // FE$ (1)

Tương tự MN//FE (2)

Ta lại có $\frac{IF}{FA} = \frac{DH}{HA} = \frac{NE}{EA} \Rightarrow IN // FE$ (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra I, K, M, N thẳng hàng

<u>Bài 5</u>: Cho hình thang ABCD (AB//CD; AB < CD). Đường thẳng qua A song song với BC cắt BD tại E, đường thẳng qua B song song với AD cắt CD tại H, đường thẳng qua H song song với BD cắt BC tại I. Chứng minh rằng:

a) EI // AB b) Ba đường thẳng EI, BH, ACđồng quy

Giải:

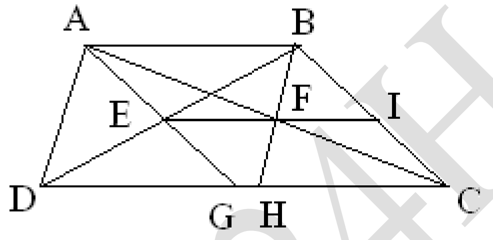
Gọi F là giao điểm của BH và AC, G là giao điểm của AE và CD

a/ Vì HI // BD $\Rightarrow \dfrac{BI}{IC} = \dfrac{DH}{HC}$ (1)

Vì DG // AB $\Rightarrow \dfrac{BE}{ED} = \dfrac{AE}{EG} = \dfrac{AB}{DG}$ (2)

Các tứ giác ABHD, ABCG là hình bình hành nên DH = AB = GC

Suy ra DG = HC thay vào (1) $\Rightarrow \dfrac{BI}{IC} = \dfrac{AB}{DG}$ (3).



Từ (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{BI}{IC} = \dfrac{BE}{ED}$

Từ đó suy ra EI // DC hay EI // AB (4)

b/ Từ (2) và (3) ta có

$\dfrac{BI}{IC} = \dfrac{BE}{ED} = \dfrac{AB}{DG} = \dfrac{AB}{HC}$, lại có HC // AB $\Rightarrow \dfrac{AB}{HC} = \dfrac{AF}{FC}$ do đó $\dfrac{BI}{IC} = \dfrac{AF}{FC}$ suy ra FI // AB hay FI // CD (5)

từ (4) và (5) $\Rightarrow$ EI, BH, AC đồng quy.

Bài 6: Cho M, N, P lần lượt nằm trên ba cạnh AB, BC, CA (hoặc trên các đường thẳng chứa các cạnh) của tam giác ABC. Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để M, N, P thẳng hàng là $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{PC}{PA} = 1$ (định lý Mê-nê-la-úyt)

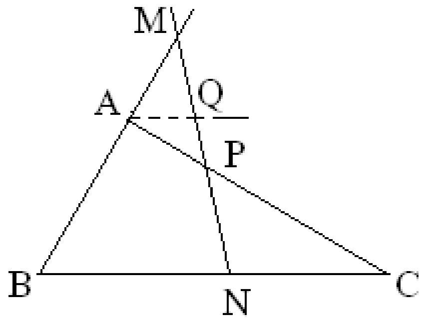
Giải:

Điều kiện cần: Giả sử M, N, P thẳng hàng

Từ A kẻ AQ // BC cắt MN ở Q ta có:

Từ ΔMBN $\Rightarrow \dfrac{MA}{MB} = \dfrac{AQ}{NB}$

Từ ΔPNC $\Rightarrow \dfrac{PC}{PA} = \dfrac{NC}{AQ}$



$\rightarrow$ Nhân từng vế hai đẳng thức trên ta được

$$\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{NC}{NB}$$

$\rightarrow$ Nhân 2 vế với $\dfrac{NB}{NC}$ ta có: $\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{PC}{PA} = 1$

Điều kiện đủ: Cho ba điểm M, N, P trên ba cạnh tam giác thoả mãn điều kiện.

$$\dfrac{MA}{MB}.\dfrac{NB}{NC}.\dfrac{PC}{PA} = 1$$

Nối MP kéo dài cắt BC ở N', theo (cm trên) $\frac{MA}{MB}.\frac{N'B}{N'C}.\frac{PC}{PA}=1$

từ đó suy ra $\frac{N'B}{N'C}=\frac{NB}{NC}$.

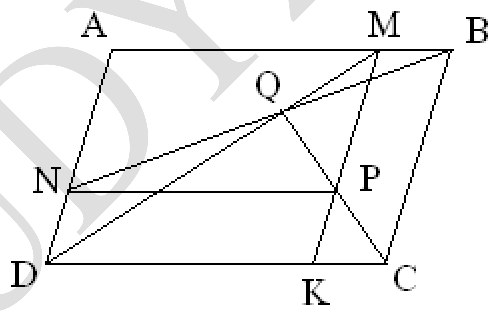
Vì N' và N cùng ở trong đoạn BC nên N' $\equiv$ N, tức là M, P, N thẳng hàng.

<u>Bài 7</u>: Trên hai cạnh AB, AD của hình bình hành ABCD, Lấy hai điểm tương ứng M, N. Gọi P là điểm sao cho AMPN là hình bình hành và Q là giao điểm của BN với MD. Chứng minh rằng ba điểm C, P, Q thẳng hàng.

<u>Giải:</u>

Vì ba điểm N, Q, B thẳng hàng nên ta có: $\frac{NA}{ND}.\frac{QD}{QM}.\frac{BM}{MA}=1$

Gọi K là giao điểm của CD với đường thẳng MP. Khi đó BCKM, NDKP là các hình bình hành nên: $\frac{NA}{ND}=\frac{PM}{PK}$ và $\frac{BM}{BA}=\frac{CK}{CD}$



$1=\frac{NA}{ND}.\frac{QD}{QM}.\frac{BM}{BA}=\frac{PM}{PK}.\frac{QD}{QM}.\frac{CK}{CD}=\frac{PM}{PK}.\frac{CK}{CD}.\frac{QD}{QM}$ Vì C, P, Q nằm trên các đường thẳng chứa các cạnh của tam giác MDK ➔ C, P, Q thẳng hàng.

<u>Bài 8</u>: Trên các cạnh BC, CA, AB của tam giác ABC lấy tương ứng các điểm P, Q, R sao cho ba đường thẳng AP, BQ và CR cắt nhau tại một điểm.

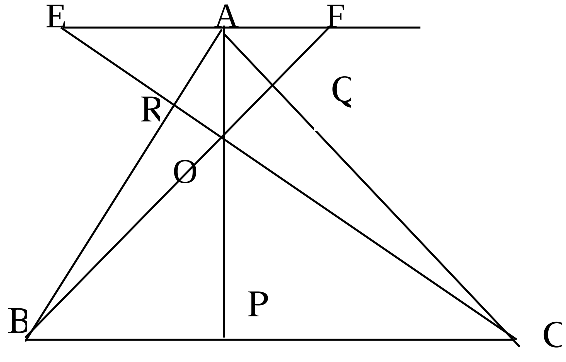
Chứng minh rằng: $\frac{AR}{BR}.\frac{BP}{PC}.\frac{CQ}{QA}=1$.

<u>Giải</u>: *(Định lý Xê-va)*

Qua A kẻ một đường thẳng song song với BC cắt các đường thẳng CR và BQ tại E và F

Gọi O là giao điểm của AP, BQ và CR.

$\Delta ARE \backsim \Delta BRC \Rightarrow \frac{AR}{RB}=\frac{AE}{BC}$ (1)



$\Delta BOP \backsim \Delta FOA \Rightarrow \dfrac{PB}{AF} = \dfrac{OP}{OA}$ (2)

$\Delta POC \backsim \Delta AOE \Rightarrow \dfrac{OP}{OA} = \dfrac{PC}{AE}$ (3)

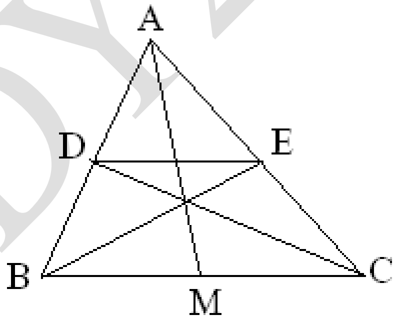
Từ (2) và (3) $\Rightarrow \dfrac{PB}{PC} = \dfrac{AF}{AE}$ (4).

$\Delta AQE \backsim \Delta CQB \Rightarrow \dfrac{CQ}{QA} = \dfrac{BC}{AF}$ (5)

Từ (1), (4) và (5) ta có $\dfrac{AR}{RB}.\dfrac{BP}{PC}.\dfrac{CQ}{QA} = \dfrac{AE}{BC}.\dfrac{AF}{AE}.\dfrac{BC}{AF} = 1$ (Điều phải c/m)

Bài 9: Cho tam giác ABC, một điểm D trên cạnh AB, một điểm E trên cạnh AC và trung điểm M của cạnh BC. Chứng minh rằng DE//BC khi và chỉ khi ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy.

Giải :



Vì M là trung điểm của BC nên $\dfrac{MB}{MC} = 1$. Do đó $\dfrac{DA}{DB}.\dfrac{MB}{MC}.\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{DA}{DB}.\dfrac{EC}{EA}$. Vì vậy, ba đường thẳng AM, BE, CD đồng quy khi và chỉ khi.

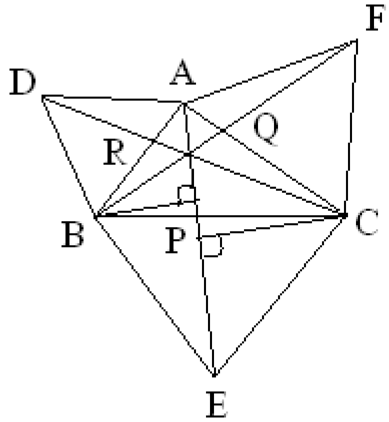
$\dfrac{DA}{DB}.\dfrac{MB}{MC}.\dfrac{EC}{EA} = \dfrac{DA}{DB}.\dfrac{EC}{EA} = 1$ hay $\dfrac{DA}{DB} = \dfrac{EA}{EC}$

tức là DE//BC

Bài 10: Chứng minh rằng nếu ba tam giác đều ABD, BCE, CAF nằm phía ngoài tam giác ABC thì ba đường thẳng AE, BF, CD đồng quy.

Giải:

Gọi P là giao điểm của AE và BC, Q là giao điểm của BF và CA, R là giao điểm của CD và AB . Hai tam giác ABE và ACE có chung cạnh AE nên tỷ số diện tích của chúng bằng tỉ số các khoảng cách từ B và C đến cạnh chung AE. Theo định lý Talét trong tam giác, tỉ số khoảng cách đó bằng $\dfrac{PB}{PC}$. Do đó $\dfrac{PB}{PC} = \dfrac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ACE}}$. (1)



Tương tự, ta có: $\dfrac{QC}{QA} = \dfrac{S_{\Delta FCB}}{S_{\Delta AFB}}$ (2);

$$\frac{RA}{RB} = \frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta DBC}} \quad (3)$$

Nhân vế với vế của (1), (2) và (3) ta có: $\frac{PB}{PC}.\frac{QC}{QA}.\frac{RA}{RB} = \frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ACE}}.\frac{S_{\Delta FCB}}{S_{\Delta FAB}}.\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta DBC}}$

Vì ΔABE = ΔDBC (c.g.c), ΔACE = ΔFCB (c.g.c), ΔFAB = ΔCAD (c.g.c).

Nên $\frac{PB}{PC}.\frac{QC}{QA}.\frac{RA}{RB} = \frac{S_{\Delta ABE}}{S_{\Delta ACE}}.\frac{S_{\Delta FCB}}{S_{\Delta FAB}}.\frac{S_{\Delta CAD}}{S_{\Delta DBC}} = 1$.

➔ Ba đường thẳng AE, BF, CD đồng quy.

Bài 11: Cho tia Ox, Oy, Oz tạo thành $xOy = yOz = 60^0$. Chứng minh rằng: Nếu A, B, C là ba điểm thẳng hàng trên Ox, Oy, Oz thì ta có: $\frac{1}{OB} = \frac{1}{OA} + \frac{1}{OC}$.

Bài 12: Qua điểm O tuỳ ý trong tam giác ABC, ta dựng các đường thẳng DE, FK, MN tương ứng song song với AB, AC, BC sao cho F và M nằm trên AB, E và K trên BC, N và D trên AC. Chứng minh: $\frac{AF}{AB} + \frac{BE}{BC} + \frac{CN}{CA} = 1$.

Bài 13: Cho hình thang ABCD có P và Q là trung điểm của hai đáy BC và AD. M là một điểm trên tia đối của tia CA. Các đường thẳng MP và MQ cắt hai cạnh bên AB và CD ở H và K. Chứng minh rằng HK song song với đáy của hình thang.